

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ НЕФТЕГАЗОВОЙ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ
ИМ. А. А. ТРОФИМУКА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

ХАЧКОВА Татьяна Станиславовна

АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОЙ ОЦЕНКИ
ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ГОРНОЙ ПОРОДЫ
ПО ЕЁ ЦИФРОВЫМ ИЗОБРАЖЕНИЯМ

25.00.10 - геофизика, геофизические методы
поисков полезных ископаемых

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Лисица Вадим Викторович,
доктор физ.-мат. наук

НОВОСИБИРСК
2020

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ИЗВЕСТНЫХ РЕШЕНИЙ. ИХ ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ	13
Глава 2. АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ МОРФОЛОГИЧЕСКИХ И ТРАНСПОРТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ГОРНОЙ ПОРОДЫ ПО ЕЁ ЦИФРОВЫМ ИЗОБРАЖЕНИЯМ	20
2.1 Постановка задачи	20
2.2 Теоретическая основа вычисления морфологических и транспортных параметров	22
2.2.1 Построение цифровой модели породы в результате численной обработки томографического изображения образца	22
2.2.2 Определение функции ковариации индикаторного случайно- го поля относительного пространственного распределения в цифровой модели	23
2.2.3 Оценка геометрических параметров породы вычислением функционалов Минковского	24
2.2.4 Связность и разветвлённость порового пространства по топо- логическим инвариантам - числам Бетти и Эйлеровой харак- теристике	26
2.2.5 Проницаемость и извилистость порового пространства поро- ды по результатам математического моделирования потоков флюида	29

2.3	Алгоритм оценки параметров, репрезентативного объёма и оптимального разрешения томографических изображений на примере образца песчаника	31
2.3.1	Репрезентативный объём цифровой модели породы по результатам статистического анализа параметров вложенных моделей	33
2.3.2	Длина корреляции индикаторной функции пространственного распределения скелета и пор	35
2.3.3	Геометрические параметры структуры песчаника по результатам статистического анализа значений функционалов Минковского	37
2.3.4	Проницаемость и извилистость порового пространства, репрезентативность цифровых моделей песчаника разного масштаба	42
2.3.5	Влияние масштаба томографического изображения на оценку параметров макроскоростной эффективной модели пороупругой среды	44
2.3.6	Оптимальное разрешение томографических изображений песчаника по результатам анализа топологических инвариантов его цифровых моделей разного масштаба	48
2.4	Сопоставление результатов лабораторного измерения и численного расчета параметров образца песчаника	52
Глава 3.	АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ ГОРНОЙ ПОРОДЫ ПО ЕЁ ЦИФРОВЫМ ИЗОБРАЖЕНИЯМ	55
3.1	Постановка задачи	55
3.2	Алгоритм оценки эффективных упругих параметров по цифровой модели породы на основе принципа эквивалентности энергий деформации	56
3.2.1	Теоретическое обоснование применения принципа эквивалентности энергий деформации неоднородного и однородного упругих тел	56
3.2.2	Вычисление компонент тензора податливости по потенциальной энергии деформации породы	60

3.2.3	Решение статической задачи теории упругости итерационным методом установления решения динамической задачи теории упругости	67
3.2.4	Верификация алгоритма оценки эффективных упругих параметров породы численными экспериментами	71
3.3	Двухмасштабный вариант алгоритма геостатистической оценки эффективных упругих параметров сцементированной породы с учётом влияния межзернового материала	84
3.3.1	Численное разделение модели сцементированной породы на зёрна и прослой между ними по результатам топологического анализа	86
3.3.2	Геостатистическая оценка эффективных упругих параметров межзернового цементирующего материала	88
3.3.3	Оценка эффективного тензора жёсткости и скорости сейсмических волн в сцементированной породе с учётом её микро-структуры	93
3.3.4	Сопоставление оценки эффективных упругих параметров песчаника и результатов их лабораторного измерения	95
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	97
	ЛИТЕРАТУРА	98

Введение

Объект исследования - цифровые изображения образца горной породы на предмет разработки численных алгоритмов оценки её эффективных (усредненных по объёму образца) морфологических, транспортных и упругих параметров.

Актуальность. Нефтегазовая промышленность в настоящее время развивается не столько за счёт открытия и ввода в эксплуатацию новых месторождений углеводородов, сколько за счёт повышения эффективности освоения уже действующих путём совершенствования инструментов получения информации об особенностях строения пласта-коллектора: распределении зон повышенной трещиноватости, кавернозности, флюидонасыщении, проницаемости коллектора и т.д. При этом важно определить не только индивидуальные характеристики среды, такие как расположение и свойства изолированных трещин или каверн, но и локализацию их скоплений, поскольку это связано с фильтрационно-емкостными свойствами коллектора. Чтобы получить информацию о "коллективных" проявлениях скоплений флюидонасыщенных микронеоднородностей в геофизических (в частности, в сейсмических) полях при их численном моделировании, необходимы новые модели и алгоритмы, объединяющие рассмотрение на разных масштабах: на макро- (до $1/4$ длины волны - десятки метров), мезо- ($0.01 - 0.1$ длины волны - первые десятки сантиметров) и микромасштабе (образец - несколько сантиметров). Для расчёта отклика мезомасштабной флюидонасыщенной структуры в волновых полях, регистрируемых на поверхности, необходимо прежде всего определить эффективные (усредненные по объёму) параметры породы на микромасштабе (т.е. на образцах), чтобы затем перейти к мезо- и макромасштабным моделям и алгоритмам.

Известные же лабораторные способы оценки эффективных параметров горной породы на образцах имеют свои недостатки: при таких исследованиях образец, как правило, подвергается внешнему физическому воздействию (например, температуры, давления и т.д.), что часто приводит к изменению или разрушению его

структуры. Кроме того, подготовка физических экспериментов и их проведение, как известно, трудоёмки, а также бывают очень дорогими и длительными.

Использование рентгеновской компьютерной микротомографии для представления внутренней структуры и оценки параметров образца горной породы позволяет многократно выполнять численные исследования с неизменённым образцом, определяя требуемые физические параметры, часть из которых невозможно получить экспериментально. Однако, как показывает практика, численная оценка зависит от разрешения томографических изображений горной породы [Keemhm and Mukerji, 2004; Arns et al., 2005; Peng et al., 2012; Alyafei et al., 2015]. Исследователи пришли к выводу, что для корректной оценки параметров породы необходимо определить оптимальное разрешение изображений, но способов его установления не предложили.

Как известно, численная оценка эффективных упругих параметров сцементированной породы на микромасштабе зависит не только от упругих параметров зёрен, но и от шероховатости их поверхности, геометрии пространства между ними, а также от упругих параметров цемента [Madonna et al., 2012; Saenger et al., 2016]. В этих исследованиях показано, что если не учитывать влияние материала, заполняющего межзерновые контакты, которые к тому же не обнаруживаются на томографических изображениях репрезентативного объёма, то численная оценка существенно завышается, как следует из сопоставления с результатами лабораторных измерений. В известных алгоритмах оценки эффективных упругих параметров по томографическим изображениям сцементированной породы все эти факторы либо не учитываются, либо численно восстанавливаемое пространство между зёрнами заполняется каким-либо мягким материалом со значениями упругих параметров из некоторого разумного интервала. В итоге для образца конкретной породы после сопоставления с результатами лабораторных экспериментов определяются поправочные коэффициенты, которые, однако, не могут быть использованы для других пород.

Отсюда следует, что известные способы оценки эффективных параметров горной породы на микромасштабе на сегодня не удовлетворяют исследователей, необходимы новые подходы в их разработке, исключая указанные недостатки.

Цель исследования - повысить достоверность численной оценки эффективных параметров горной породы на микромасштабе за счёт использования её томографического изображения оптимального разрешения, SEM-изображений микроструктурных элементов и результатов их геостатистического анализа.

Научные задачи:

1. Разработать алгоритм численной оценки морфологических (пористости, длины корреляции индикаторной функции пространственного распределения пор, удельной площади поверхности раздела скелет-поры, её средней кривизны, связности и разветвлённости порового пространства) и транспортных параметров (проницаемости, извилистости порового пространства) горной породы по её томографическим изображениям оптимального разрешения.

2. Разработать алгоритм численной оценки эффективных упругих параметров горной породы (тензора жёсткости, скорости продольных и поперечных волн) по её томографическим изображениям оптимального разрешения и SEM-изображениям поверхности образца с учётом микроструктуры и свойств цементирующего материала.

Теория и методы исследования

Теоретической основой решения поставленных задач являются:

- теория множеств и вычислительная топология как основа вычисления топологических и геометрических параметров горной породы;
- основы статистических методов моделирования непрерывных и индикаторных случайных полей, а также анализа основных параметров этих полей;
- современный математический аппарат конечно-разностного метода на сдвинутых сетках для решения уравнений математической физики.

При исследовании цифровых изображений породы используются методы:

- фильтрации нелокального среднего (Non-local means filter) – для удаления высокочастотного шума изображения;
- сегментации Отсу (Otsu) – для разделения изображения на минеральные составляющие и поровое пространство;

- вычисления топологических и геометрических параметров (чисел Бетти, Эйлеровой характеристики и функционалов Минковского), а также транспортных параметров породы;
- моделирование статистических реализаций шероховатых границ зёрен с использованием гауссовских случайных процессов;
- осреднение упругих параметров тонкослоистой среды бесконечного простираения (метод Schoenberg);
- конечно-разностный метод решения динамической задачи теории упругости для расчёта сейсмических волновых полей [Vishnevsky et al., 2014].

Верификация разработанных алгоритмов выполнялась сериями численных экспериментов, сопоставлением результатов, полученных разными численными методами, а также сопоставлением с данными лабораторных измерений.

Защищаемые научные результаты:

1. Алгоритм численной оценки морфологических (пористости, длины корреляции индикаторной функции пространственного распределения пор, удельной площади поверхности раздела скелет-поры, её средней кривизны, связности и разветвлённости порового пространства) и транспортных параметров (проницаемости, извилистости порового пространства) горной породы по её томографическим изображениям оптимального разрешения.

2. Алгоритм численной оценки эффективных упругих параметров горной породы (тензора жёсткости, скорости продольных и поперечных волн) по томографическим изображениям оптимального разрешения и SEM-изображениям поверхности образца с учётом микроструктуры и свойств цементирующего материала.

Научная новизна

1. Разработан и реализован в виде научно-исследовательской версии программного продукта алгоритм оценки морфологических и транспортных параметров породы, который включает оригинальные решения:

- по результатам статистического анализа цифровых изображений образца горной породы установлено различие репрезентативных объёмов для оценки разных групп параметров;

- в результате анализа топологических инвариантов томографических изображений разного разрешения установлен критерий определения оптимального разрешения и выбрана соответствующая ему модель с наибольшей связностью и разветвлённостью порового пространства для корректной оценки параметров.

2. Разработан и реализован в виде научно-исследовательской версии программного продукта алгоритм оценки эффективных упругих параметров горной породы по её томографическому изображению (совместно с Г.В. Решетовой) и его двухмасштабный вариант для цементированной породы с учётом микроструктуры и свойств цементирующего материала, который включает ряд оригинальных решений:

- по результатам топологического анализа скелетного пространства выполнено разделение цифрового образца цементированной породы на зёрна и прослой между ними (совместно с Я.В. Базайкиным);

- с использованием статистического моделирования стационарного гауссовского случайного процесса (совместно с Д.Р. Колюхиным) построен представительный набор моделей межзернового контакта с шероховатыми границами зёрен по данным SEM-изображений породы;

- новым эквивалентным (сохраняющим эффективные упругие параметры) преобразованием моделей межзернового контакта вычислено распределение упругих параметров цементирующего материала, заполняющего плоские прослой между зёрнами;

- в результате моделирования трёхосного нагружения на основе принципа эквивалентности энергий деформации получена оценка эффективных упругих параметров цементированной породы с учётом её микроструктуры и распределения параметров цемента.

Личный вклад

Соискателем разработаны и реализованы в виде научно-исследовательской версии программного продукта модули алгоритма оценки морфологических

(пористости, удельной площади поверхности раздела поры-скелет, её средней кривизны) и транспортных параметров (проницаемости, извилистости порового пространства), модули построения цифровой модели породы, определения репрезентативного объёма образца и оптимального разрешения томографических изображений для корректной оценки параметров, двухмасштабный модуль алгоритма оценки эффективных упругих параметров цементированной породы, включающий численное разделение цифрового образца на зёрна и прослой между ними (совместно с Я.В. Базайкиным), построение и эквивалентное преобразование моделей межзернового контакта для вычисления распределения упругих параметров цементирующего материала, построение наборов моделей породы с разным цементированием и вычисление оценки его эффективных упругих параметров. Выполнены все численные исследования, получены оценки, представительной серией численных экспериментов и сопоставлением с лабораторными данными выполнена верификация алгоритмов. Принимала участие в подготовке научных работ к публикации.

Теоретическая и практическая значимость результатов

Разработанные алгоритмы оценки эффективных параметров горной породы позволяют получать информацию по её цифровым изображениям оптимального разрешения с учётом микроструктуры и свойств цементирующего материала. При этом значительно повышается достоверность оцениваемых параметров, которые затем используются при построении разномасштабной модели резервуара и изучении взаимодействия сейсмических волновых полей с мезомасштабной структурой флюидонасыщенного пласта. Это даёт возможность получить более точную информацию о "коллективных" проявлениях скоплений флюидонасыщенных микронеоднородностей в сейсмических полях и особенностях тонкого строения исследуемого пласта-коллектора (распределении зон повышенной трещиноватости, кавернозности, флюидонасыщения и т.д.), что имеет существенную значимость при поиске и оптимальном освоении месторождений углеводородов.

Апробация работы и публикации

Результаты исследования известны научной общественности. Они доклады-

вались и получили одобрение специалистов на 14 конференциях:

- IV Балтийская школа-семинар "Петрофизическое моделирование осадочных пород", Санкт-Петербург, 2015;

- Международный симпозиум EAGE-SCA по вычислительной физике горных пород, Пекин, Китай, 2016;

- Международная конференция Европейского общества геоученых и инженеров (EAGE Conference and Exhibition), Вена, Австрия, 2016; Париж, Франция, 2017;

- Международная конференция и выставка EAGE, Санкт-Петербург, 2016, 2018;

- Ежегодные конференции Общества промысловой геофизики (SEG Annual Meeting), Даллас, США, 2016; Хьюстон, США, 2017;

- Международный научный конгресс "ГЕО-Сибирь", Новосибирск, 2017, 2018;

- 5-й Российско-Китайский семинар по вычислительной математике и научным вычислениям, Новосибирск, 2017;

- Международная геолого-геофизическая конференция "ГеоЕвразия-2018. Современные методы изучения и освоения недр Евразии", Москва, 2018;

- 7-я Международная конференция "Конечно-разностные методы. Теория и приложения", Лозенец, Болгария, 2018;

- Международная конференция "Вычислительная математика и математическая геофизика", посвящённая 90-летию со дня рождения академика А.С. Алексеева, Новосибирск, 2018;

а также на научных семинарах Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука Сибирского отделения РАН.

Результаты исследования изложены в 19 научных публикациях, из которых 3 статьи индексируются в международных базах цитирования Web of Science, Scopus:

- Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 2017;

- Lecture Notes in Computer Science, 2019 (2 публикации),

2 статьи - в научных журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК:

- Технологии сейсморазведки, 2016;

- Вычислительные методы и программирование, 2017
и 14 - в материалах российских и международных конференций и симпозиумов.

Благодарности

Успешному выполнению исследований и написанию диссертации способствовала всесторонняя поддержка и постоянное внимание д.ф.-м.н., профессора В.А. Чеверды, за что автор выражает ему свою глубокую благодарность и признательность. Автор искренне благодарна научному руководителю д.ф.-м.н. В.В. Лисице за квалифицированную помощь при решении сложных задач разработки численных алгоритмов, постоянное участие, внимание и поддержку.

Особую благодарность хочется выразить своим коллегам из разных научных институтов д.ф.-м.н. Г.В. Решетовой, д.ф.-м.н. Я.В. Базайкину и к.ф.-м.н. Д.Р. Колюхину за профессионализм и компетентность при совместном обсуждении и решении сложных узкоспециализированных математических задач, а также участие и поддержку.

Автор благодарит коллег из Университета Австралии (Curtin University, Perth, Australia) профессора Б.Я. Гуревича и профессора М.Е. Лебедева за предоставленные томографические и SEM-изображения песчаника, без которых выполнение численных исследований было бы невозможно, а также за результаты лабораторных измерений, которые позволили верифицировать разработанные алгоритмы.

Глубокую признательность автор выражает своим коллегам научным сотрудникам лаборатории вычислительной физики горных пород, особенно к.ф.-м.н. В.И. Костину, к.ф.-м.н. С.А. Соловьеву, с.н.с. Д.М. Вишневному и аспиранту М.А. Новикову, сотрудникам лаборатории многоволновых сейсмических исследований, особенно д.ф.-м.н. М.И. Протасову, к.ф.-м.н. К.Г. Гадыльшину, к.ф.-м.н. Д.А. Неклюдову и к.ф.-м.н. В.Г. Хайдукову, а также д.г.-м.н. В.Д. Суворову за содержательные, плодотворные обсуждения и помощь при написании и представлении работы.

Автор искренне благодарит В.И. Самойлову за ценные методические рекомендации и всестороннюю поддержку при подготовке диссертации.

Глава 1

Аналитический обзор известных решений. Их достоинства и недостатки

Для оценки эффективных (усреднённых) параметров микронеоднородной среды используются разные алгоритмы, в основе которых лежит теория эффективных сред (ТЭС) [Салганик, 1973; Zeller, Dederichs, 1973; Kuster, Toksoz, 1974; Gubernatis, Krumhansl, 1975; Вавакин, Салганик, 1978; Хорошун, 1978; Исупов, 1985; Канаун, Левин, 1993; Kachanov, 1993]. Горная порода здесь рассматривается как композитная среда, основными составляющими которой являются минеральные зёрна и цемент, а также поры и трещины, заполненные флюидом. А поскольку геофизические задачи решаются на макромасштабе, несоизмеримо большем, чем размер неоднородностей, то исследуются "коллективные" проявления микроструктур - эффективные (усреднённые) физические характеристики микронеоднородных сред.

В начале XXI века публикуются обзоры известных и представляются новые алгоритмы и формулы определения эффективных свойств порово-трещиноватых коллекторов, приводятся примеры решения геофизических задач [Bayuk I. et al., 1998; Chesnokov E. et al., 2010; Баяк, 2011, 2013, 2014]. При этом используются модели от микромасштаба образца горной породы в сантиметрах и мезомасштаба в десятки сантиметров до макромасштаба в сотни метров, построенные с помощью геометрических приближений с учетом данных об их строении на каждом конкретном масштабе.

В ряде работ при оценке эффективных параметров микронеоднородной среды используются численные модели, построенные по её микротомографическим изображениям. Например, зарубежными исследователями разработаны численные алгоритмы оценки проницаемости породы по результатам микромасштабного моделирования потока флюидов в пористой среде [Arns et al., 2003; Arns et al., 2004a; Blunt et al., 2013; Mostaghimi et al., 2013; Andra et al., 2013a]. Численным моделированием статических, квазистатических упругих и неупругих состояний на мик-

роуровне определяются упругие и неупругие параметры породы на мезо-, макро-масштабе [Saenger, 2008; Makarynska et al., 2008; Saenger et al., 2011; Shulakova et al., 2013; Andra et al., 2013a]. Разработаны и другие алгоритмы перехода от микро- к мезо- и макромасштабу [Mavko et al., 2009]. При этом в их основе лежат характеристики, полученные на микромасштабе, т.е. на масштабе образца горной породы.

Традиционно физические параметры образца горной породы определяются лабораторными измерениями. Например, пористость и распределение пор по размеру - по данным порометрии, на основе закона капиллярности определяющей проникновение несмачиваемой жидкости (как правило, ртути) в пористые области при разных давлениях. В условиях лабораторного эксперимента образец подвергается внешнему физическому воздействию (например, температуры, давления и т.д.), что, как правило, приводит к изменению или разрушению его структуры. Кроме того, подготовка экспериментов и их проведение, как известно, трудоемки и бывают очень дорогими и длительными (до нескольких месяцев при насыщении водой некоторых материалов, например сланцев).

С развитием компьютерных технологий и увеличением мощности суперкомпьютеров формируется новое направление в петрофизике - вычислительная физика горных пород (*digital rock physics* - в англоязычной литературе), одной из задач которой является определение их петрофизических параметров на микроуровне с целью распространения на мезо- и макромасштабы, соизмеримые с разрешающей способностью сейсмического метода разведки.

Численные методы оценки параметров по цифровому образцу, использующие рентгеновскую компьютерную микротомографию для представления внутренней структуры, имеют как достоинства, так и недостатки [Snudde et al., 2013]. К достоинствам авторы относят неразрушающий принцип таких исследований и возможность изучения изменений внутренней структуры породы, происходящих под влиянием внешних условий, при разрешении до нескольких сотен нанометров [Wildenschild and Sheppard, 2013]. Кроме того, численное моделирование позволяет определять требуемые физические параметры, часть из которых невозможно получить экспериментально, например чистые сдвиговые деформации. Ещё одно достоинство цифровых инструментов - это большая детальность изучения микро-масштабных неоднородных пористых структур [Brunke et al., 2007, 2010; Sok et al.,

2010]. Численными методами определяются не только пористость и размеры пор внутри образца, но и 3D распределение пористой структуры, геометрия, топология пор, определяющие такие транспортные параметры, как проницаемость и извилистость порового пространства. С помощью современного программного обеспечения со сложными алгоритмами выделения минеральных зёрен и построения их распределения в образце выполняется их 3D анализ, вычисляются структурные параметры, такие как объём, площадь поверхности, сферичность зёрен, эквивалентный диаметр и др. [Snudde et al., 2013]. Следующее преимущество методов вычислительной физики горных пород - возможность анализа трещин в них, вызванных как воздействием природных геологических факторов (например, тектонических движений или изменений литостатического давления), так и техногенными процессами при буровых работах, извлечении флюида и т.д. Исследователями по цифровым изображениям образца моделируется течение жидкости и анализируется взаимодействие потока флюида с трещинами и матрицей [Dvorkin et al., 2009; Karpyn et al., 2009; Petchsingto et al., 2009; Toulke et al., 2010; Kalam et al., 2011]. Описание и понимание пористой структуры и трещин имеет важное значение для оптимального освоения месторождений нефти и газа, поскольку именно системы пор контролируют процессы переноса жидкости, описываемые проницаемостью и диффузией.

Несмотря на достоинства численных методов исследования образцов горных пород, имеются и недостатки, первый из которых - шумы и артефакты получаемых изображений, которые присущи всем методам визуализации. Методам уменьшения шума при томографической съёмке, определению его минимально достижимого предела посвящены работы зарубежных исследователей [Passmore et al., 2001; Tlustos et al., 2004]. Изучением артефактов (уплотнения пучка лучей, его конического эффекта, фазового контраста) и созданием способов их учёта и коррекции занимаются другие авторы [Van de Castele et al., 2002; De Witte, 2010; Boone et al., 2012a]. Ещё одно несовершенство - эффект дискретизации, который проявляется при переходе от любого непрерывного объекта к дискретному изображению, состоящему из набора пикселей или вокселей. Он вызван техническими причинами, по которым размер вокселя невозможно уменьшать до бесконечности. Анализу этого эффекта, а также возможных ошибок при обработке изображений,

связанных с этим, и способам их коррекции посвящен ряд публикаций [Ketcham and Carlson, 2001; Kerckhofs et al., 2008; Young et al., 2008]. Кроме того, при использовании микротомографии результаты анализа структуры горной породы зависят от действий оператора как при томографической съёмке, так и при обработке полученных изображений. Поскольку не существует стандартизованного порядка выполнения сканирования, а набор свободных параметров, изменяемых произвольно, достаточно широк, то и результаты томографии могут получиться разными. Еще более ответственный этап - это обработка изображений, особенно их сегментация [Baveye et al., 2010]. Разные подходы к сегментации, как традиционные, так и новые, их достоинства и недостатки, а также их сравнительный анализ представлены в работе зарубежного исследователя Iassonov с соавторами [Iassonov et al., 2009].

Один из недостатков вызван техническим ограничением: типичное микротомографическое изображение не превышает определённое число точек в каждом направлении (1000 – 4000). Следовательно, существует такое значение разрешения, после которого более детальная съёмка будет отображать только часть образца горной породы, и чем выше разрешение, тем эта часть меньше. Таким образом она уменьшается до объёма, который уже не является репрезентативным для статистически достоверного определения конкретного параметра [Zhang et al., 2000; Yoon and Dewers, 2013; Rozenbaum and du Roscoat, 2014; Milani et al., 2016]. Если же уменьшать разрешение для достижения репрезентативного объёма, то это приводит к потере детальности изображения, исчезают узкие каналы, малые компоненты, шероховатость зёрен и т.д., которые, несомненно, играют важную роль при восстановлении физических параметров. Исследователями установлено, что очень важно найти компромисс между детальностью изображения и репрезентативностью объёма [Peng et al., 2012]. В этой работе представлены численные исследования по изображениям образца песчаника Berea с разрешениями 12,7 и 0,35 мкм, в которых сопоставляются результаты расчётов и лабораторных экспериментов определения пористости и распределения пор по размерам. Авторы приходят к выводу о том, что как слишком малое, так и слишком большое разрешения могут дать некорректные результаты при определении пористости, связности пор и распределении пор по размерам, что для корректной оценки параметров необходимо определить оптимальное разрешение томографической съёмки. Но они не

устанавливают это оптимальное разрешение, ограничиваясь только определением репрезентативного объёма (2.8 мм), а также не анализируют изображения с более подходящим разрешением в диапазоне от 2 до 6 мкм. Определению роли разрешения 3D изображения при оценке пористости, распределения пор и каналов, проницаемости и т.д., посвящены исследования и других авторов [Keemhm and Mukerji, 2004; Arns et al., 2005; Alyafei et al., 2015]. В них определяется чувствительность оценок этих характеристик к изменению разрешения модели, сопоставляются результаты, полученные по изображениям с разным разрешением для образцов карбоната, песчаника и известняка. Исследователями установлено, что оценка пористости песчаника Фонтенбло нечувствительна к разрешению, в то время как для проницаемости она возрастает при очень малом разрешении [Keemhm and Mukerji, 2004]; оценка пористости карбоната очень чувствительна к изменению разрешения и снижается с 11,2% при 2,5 мкм до 3,2% при 20 мкм [Arns et al., 2005]; результаты расчёта пористости двух разных песчаников нечувствительны к изменению разрешения, а оценка проницаемости значительно изменяется при изменении разрешения от 6 до 20 мкм [Alyafei et al., 2015]. Однако в этом исследовании разрешение уменьшается искусственно, т.е. авторы рассматривают сегментированное изображение высокого качества с разрешением около 2.7 мкм, а затем применяют метод огрубления, снижая тем самым разрешение до 21.6 мкм, что не соответствует фактическому изменению разрешающей способности исходных изображений. Это подтверждает вывод о важности использования микротомографических изображений оптимального разрешения при оценке петрофизических параметров, но способов его определения в известной литературе не найдено.

Особенно остро вопрос о компромиссе между разрешением и репрезентативным объёмом встает при оценке физических, в частности, упругих параметров. Во-первых, репрезентативный объём для такого измерения больше, чем для оценки морфологии порового пространства [Saenger, 2008; Shulakova et al., 2013; Saenger et al., 2016]. Во-вторых, он зависит от контраста упругих параметров зёрен и цемента в модели сцементированной породы [Huet 1999]. В-третьих, для такой породы существенное влияние на результаты оказывают шероховатость поверхности зёрен, геометрия пространства между ними и параметры цемента [Madonna et al., 2012; Saenger et al., 2016]. Если не учитывать влияние материала, заполняющего межзер-

новые контакты, которые не обнаруживаются на томографических изображениях репрезентативного объёма, то оценка существенно завышается, что подтверждается сопоставлением с результатами лабораторных измерений. Если же учесть все эти требования, т.е. построить полномасштабную модель репрезентативного объёма с достаточно высоким разрешением, чтобы стали различимы межзерновые контакты, то для численного моделирования статического нагружения потребуются огромные вычислительные ресурсы.

Для преодоления этих трудностей используется несколько подходов. В инженерном моделировании применяются методы многомасштабных конечных элементов [Gao et al., 2015; Eroev et al., 2019], разные методы гомогенизации - от предложенного Backus до разных усовершенствованных вариантов [Backus, 1962; Capdeville et al., 2010]. Но они требуют детального знания модели на микро- и наномасштабе. Другой подход основан на использовании изображений репрезентативного объёма и разрешения, недостаточного для однозначного разделения зёрен, оценки и учёта шероховатости их поверхностей, а также выделения цементирующего материала. Зарубежными учеными для восстановления контактов между зёрнами используется численный метод, и затем они также численно заполняются каким-либо мягким материалом [Madonna et al., 2012; Saenger et al., 2016]. При таком подходе оценка более достоверная по сравнению с упругими параметрами, рассчитанными без учёта влияния межзернового цемента. Но при восстановлении упругих параметров цементирующего материала не учитывается микроструктура породы, а выделенное пространство между зёрнами заполняется цементом с упругими значениями из некоторого разумного интервала, после чего сопоставлением с результатами лабораторных исследований определяются поправочные коэффициенты для образца конкретной породы, которые не могут быть использованы для других пород.

Из анализа следует, что для устранения указанных недостатков необходимо разработать новые, более совершенные алгоритмы, позволяющие:

- найти способ определения оптимального разрешения томографических изображений для оценки параметров образца горной породы с высокой степенью достоверности;
- при оценке эффективных упругих параметров сцементированной породы

учесть микроструктуру межзернового контакта для определения и использования параметров цементирующего материала.

Глава 2

Алгоритм оценки морфологических и транспортных параметров горной породы по её цифровым изображениям

2.1 Постановка задачи

Входные данные алгоритма - цифровые изображения образца горной породы в виде набора двумерных полутоновых изображений, полученных с помощью рентгеновской компьютерной томографии, позволяющие с высоким разрешением восстановить структуру породы [Schladitz, 2011; Madonna et al., 2012, 2013; Wildenschild, Sheppard, 2013]. Трёхмерное строение образца восстанавливается путем синтеза большого количества рентгенограмм, полученных под разными углами проецирования. Результат реконструкции - томографическое изображение - зависит от параметров сканирования (электрического напряжения, силы тока, мощности рентгеновской трубки, размера фокального пятна, времени съёмки, размера вокселя, количества проекций и т.д.). Размер вокселя определяет разрешение съёмки, её детальность, а также размер отсканированной части образца, что в совокупности называют масштабом томографического изображения, т.е. при прочих равных условиях съёмки один и тот же образец породы может быть отсканирован с разным размером вокселя, в результате чего получается несколько трёхмерных томографических изображений разного масштаба.

Задача этой части исследования - разработать алгоритм численной оценки морфологических и транспортных параметров горной породы, который включает определение репрезентативного объёма цифрового образца для оценки каждого параметра, а именно геометрических параметров (удельной площади поверхности и средней кривизны поверхности раздела скелет—поры) - вычислением функционалов Минковского, топологических (связности и разветвлённости порового пространства образца) - вычислением чисел Бетти и Эйлеровой характеристики, транспортных (проницаемости, извилистости порового пространства) - численным

моделированием потоков флюида в пористой среде, а также пористости и длины корреляции, характеризующей взаимное распределение скелет—поры (Рисунок 2.1). Затем по результатам численных экспериментов на изображениях образца песчаника из обнажения Берсимер (Австралия) с разным разрешением определить влияние масштаба (разрешения и размера) томографического изображения на оценки как указанных характеристик, так и параметров макроскоростной эффективной модели пороупругой среды при переходе к макромасштабу. И наконец, по результатам топологического анализа определить оптимальное разрешение томографических изображений для корректной оценки выбранных параметров [Базайкин, ..., Хачкова, 2016].



Рисунок 2.1 – Схема алгоритма оценки морфологических и транспортных параметров по томографическим изображениям образца горной породы

2.2 Теоретическая основа вычисления морфологических и транспортных параметров

2.2.1 Построение цифровой модели породы в результате численной обработки томографического изображения образца

Для оценки параметров горной породы по набору двумерных полутонных изображений, полученных с помощью рентгеновской компьютерной томографии, прежде всего строится цифровая модель образца [Базайкин, ..., Хачкова, 2016]. Поскольку рентгеновская томография имеет ряд недостатков, то изображения нуждаются в предварительной обработке: удалении краевых эффектов, устранении затухания и фильтрации шумов [Kaestner et al., 2008; Andra et al., 2013]. Поэтому изображения сначала обрезаются, потом удаляется высокочастотный шум с использованием фильтра нелокального среднего (Non-local means filter), который, в отличие от локальных методов, основан на взвешенном осреднении всех пикселей изображения. При этом веса зависят от близости не отдельных пикселей, а целых блоков, что позволяет эффективно подавлять шумы томографических изображений, сохраняя при этом контрастность границ между скелетом и порами [Buades et al., 2005].

Следующим, и наиболее важным, этапом построения цифровой модели является сегментация полученных изображений, которая основывается на знании его минерального состава и заключается в разделении изображения на минеральные составляющие скелета и поровое пространство. Для двухкомпонентного разделения используется метод Отсу с минимизацией дисперсии внутри класса, которая определяется как взвешенная сумма дисперсий классов вокселей фона и основного изображения [Otsu, 1979]. Это один из немногих глобальных методов нахождения порога сегментации, обеспечивающий высокую степень надежности разделения изображений [Iassonov et al., 2009; Andra et al., 2013].

Таким образом строится трёхмерная бинарная модель образца горной породы для численной оценки морфологических и транспортных параметров [Bazaikin, ..., Khachkova, 2017].

2.2.2 Определение функции ковариации индикаторного случайного поля относительного пространственного распределения скелет—поры в цифровой модели

При вычислении длины корреляции, которая характеризует взаимное пространственное распределение скелет—поры, построенная трёхмерная бинарная модель рассматривается как реализация случайного поля, полностью определённая индикаторной функцией J , которой описывается это распределение [Bazaikin, ..., Khachkova, 2017]:

$$J(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{скелет,} \\ 0, & \text{поровое пространство.} \end{cases}$$

Поскольку структура образца породы - поровое пространство и скелет - существенно нерегулярна, то для описания функции $J(x, y, z)$ используется вероятностный подход: функция J рассматривается как статистически однородное биномиальное случайное поле, основными статистическими характеристиками которого являются среднее значение $E\{J\}$ и функция ковариации C_J [Kyriakidis et al., 1999]:

$$m_J = E\{J(x, y, z)\}, \quad C_J(h_x, h_y, h_z) = E\{(J(x, y, z) - m_J)(J(x + h_x, y + h_y, z + h_z) - m_J)\}, \quad (2.1)$$

которая характеризует корреляцию между значениями случайного поля J на векторе расстояния (h_x, h_y, h_z) . Поскольку она полностью определяет двухточечное распределение случайного поля, то используется в качестве меры для сравнения изображений и при моделировании статистических реализаций случайного поля, т.е. синтетических образцов [Kyriakidis et al., 1999]. При этом длина корреляции I определяет расстояние, за пределами которого значения случайного поля практически не коррелируют между собой: это такое расстояние, на котором функция ковариации C_J уменьшается в e раз (в 2,718 раза) по сравнению со значением на нулевом расстоянии [Simonovski et al., 2004], т.е.

$$C_J(I) = e^{-1}C_J(0). \quad (2.2)$$

2.2.3 Оценка геометрических параметров породы вычислением функционалов Минковского

При оценке геометрических параметров образца породы его трехмерная бинарная модель рассматривается как объединение двух непересекающихся тел, порового пространства P и скелета S , каждому из которых свойственны такие интегральные геометрические характеристики, как объём, площадь поверхности раздела скелет—поры, средняя кривизна этой поверхности, полная кривизна и Эйлера характеристика, которые определяются с помощью функционалов Минковского [Mecke, 2000; Arns et al., 2004b; Vazaikin, ..., Khachkova, 2017]. Формулы их вычисления для бинарного цифрового изображения образца, которое представляет собой набор вокселей (прямоугольных параллелепипедов), выведены и обоснованы зарубежными исследователями [Arns et al., 2004b; Vogel et al., 2010].

Так, в d -мерном пространстве определяется $d + 1$ функционал Минковского, т.е. четыре в трехмерном пространстве [Mecke, 2000; Vogel et al., 2010]. При этом общий объём V структурной единицы, в частности порового пространства P , находится вычислением функционала M_0 :

$$M_0(P) = V(P). \quad (2.3)$$

Остальные геометрические параметры определяются как интегралы по поверхности раздела δP скелета и порового пространства. В трёхмерном случае площадь S поверхности раздела скелет—поры находится вычислением первого функционала Минковского M_1 :

$$M_1(P) = \int_{\delta P} ds = S(P), \quad (2.4)$$

где ds - элемент поверхности раздела (Рисунок 2.2) [Vogel et al., 2010].

Средняя кривизна C этой поверхности определяется вычислением второго функционала Минковского M_2 :

$$M_2(P) = \frac{1}{2} \int_{\delta P} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) ds = C(P), \quad (2.5)$$

где r_1 и r_2 - минимальный и максимальный радиусы кривизны элемента поверхности ds соответственно (Рисунок 2.2) [Vogel et al., 2010].

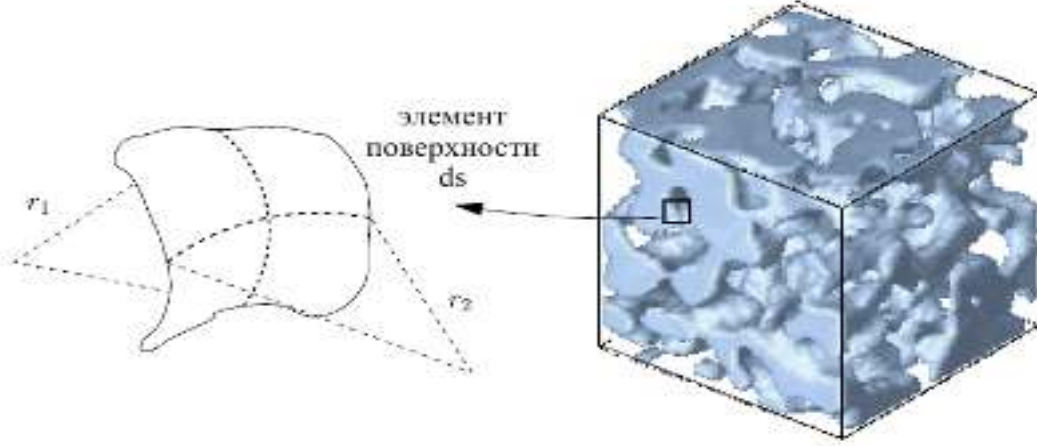


Рисунок 2.2 – Трёхмерная структура образца горной породы с поверхностью раздела скелет–поры δP , элемент этой поверхности ds и его локально определённые радиусы кривизны: r_1 (минимальный) и r_2 (максимальный)

Вычислением третьего функционала M_3 определяется полная кривизна K :

$$M_3(P) = \int_{\delta P} \frac{1}{r_1 r_2} ds = K(P), \quad (2.6)$$

причем эта величина линейно связана с Эйлеровой характеристикой χ , которая является топологическим инвариантом, т.е. неизменна при непрерывных преобразованиях пространства:

$$\chi(P) = \frac{1}{4\pi} M_3(P). \quad (2.7)$$

Поскольку функционалы Минковского аддитивны [Mecke, 2000; Arns et al., 2004b], то они эффективно вычисляются суммированием по всем вокселям модели с учетом локальных вкладов соседних, граничащих по μ -мерной границе вокселей $\vec{x}^{(\mu)}$ [Arns et al., 2004b]:

$$M_\nu(A) = \sum_{\mu=3-\nu}^3 \frac{(-1)^{3-\nu+\mu} \nu! \mu!}{3!(\nu + \mu - 3)!} \sum_{\vec{x}^{(\mu)}} \chi(A \cap \vec{x}^{(\mu)}), \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (2.8)$$

где

$$\chi(A) = \begin{cases} 1, & A \neq \emptyset \\ 0, & A = \emptyset. \end{cases} \quad (2.9)$$

Для сравнения оценок геометрических параметров, найденных для изобра-

жений с разным масштабом (разрешением и размером), вычисляются удельные функционалы Минковского m_k :

$$m_k(P) = \frac{M_k(P)}{V}, k = 0, 1, 2, 3, \quad (2.10)$$

где V - общий объём цифровой модели.

Эти параметры имеют общеизвестное физическое толкование: m_0 - это пористость образца породы, m_1 - удельная площадь поверхности раздела скелет—поры, которая учитывается при взаимодействии веществ на границе раздела, например, при растворении скелета углекислым газом, m_2 соотносится с формой порового пространства и связана с механическими свойствами, наконец, m_3 соотносится со связностью порового пространства, которая обеспечивает проницаемость образца породы.

2.2.4 Связность и разветвлённость порового пространства по топологическим инвариантам - числам Бетти и Эйлеровой характеристике

Топология - это раздел математики, который изучает свойства пространства, не изменяющиеся при непрерывных преобразованиях. А параметры, характеризующие эти свойства, называют инвариантами, и они отличаются от геометрических тем, что не являются метрическими, т.е. не зависят от размера пространства. При оценке топологической структуры трёхмерного изображения образца подготовленная цифровая модель, как и при определении геометрических параметров, рассматривается как объединение двух непересекающихся тел: порового пространства P и скелета S [Базайкин, ..., Хачкова, 2016]. Для каждого из них математически и физически определяется связность вокселей, составляющих тело [Kong et al., 1989; Wildenschild et al., 2013]:

- два вокселя порового пространства $v_1 \in P$ и $v_2 \in P$ связаны, если они имеют общую двумерную грань;
- два вокселя скелета $v_1 \in S$ и $v_2 \in S$ связаны, если они имеют как минимум одну общую вершину, т.е. граничат по вершине, ребру или грани.

Математически это определение связности выведено Kong с коллегами [Kong et al., 1989], а физически объясняется тем, что даже небольшой контакт зёрен

меняет жесткость горных пород, в то время как две поры, касающиеся только ребром или вершиной, не обеспечивают поток жидкости.

Топологическая структура трёхмерного тела описывается тремя числами Бетти и Эйлеровой характеристикой [Kong et al, 1989; Robins et al., 2016]. Компонента связности C_j порового пространства P определяется как максимальное объединение вокселей $v_i \in P$, при котором любые два из них могут быть соединены множеством связанных пар соседних вокселей, при этом нулевое число Бетти $b_0(P)$ - это общее число компонент связности порового пространства. Первое число Бетти $b_1(P)$ представляет количество независимых сквозных "туннелей" в поровом пространстве, а второе число Бетти $b_2(P)$ представляет собой число трёхмерных пустот в теле. Поскольку поровое пространство и скелет дополняют друг друга, то второе число Бетти порового пространства вычисляется как $b_2(P) = b_0(S) - 1$, где $b_0(S)$ - нулевое число Бетти для скелета, т.е. число его компонент связности.

Четвертым топологическим инвариантом тела является Эйлерова характеристика, которая выражается как $\chi(P) = b_0(P) - b_1(P) + b_2(P)$ и служит интегральной оценкой топологической сложности порового пространства. Эйлерова характеристика - важный показатель структуры порового пространства. В частности, знак Эйлеровой характеристики $\chi(P)$ указывает на тип связности тела. Так, положительное значение $\chi(P)$ указывает на то, что количество компонент связности больше, чем количество "туннелей", т.е. поровое пространство представляет собой семейство слабо связанных включений. А отрицательное её значение, напротив, говорит о том, что количество "туннелей" превышает количество компонент связности. Однако при анализе Эйлеровой характеристики порового пространства необходимо учитывать наличие небольших (до одного вокселя) пор, которые могут появляться при недостаточном разрешении изображения либо как артефакты шумоподавления при обработке изображений. При большом количестве таких компонент связности Эйлерова характеристика значительно увеличивается, но при этом связность порового пространства, у которой прямая связь с проницаемостью образца породы, остается неизменной. Для исключения влияния таких факторов

на оценку топологической структуры породы используются взвешенные первые числа Бетти $\bar{b}_1(P)$ и взвешенная Эйлерова характеристика $\bar{\chi}(P)$, определенные по формулам:

$$\bar{b}_1(P) = \frac{\sum_{j=1}^N W_j b_1(C_j)}{\sum_{j=1}^N W_j}, \quad \bar{\chi}(P) = \frac{\sum_{j=1}^N W_j \chi(C_j)}{\sum_{j=1}^N W_j}, \quad (2.11)$$

где $N = b_0(P)$, C_1, \dots, C_N - компоненты связности порового пространства P , а W_1, \dots, W_N - их объемы.

Для доказательства устойчивости взвешенных топологических характеристик к добавлению малых по объёму объектов рассматривается возмущённое поровое пространство P' , полученное добавлением новых компонент связности D'_j , $j = 1, \dots, N'$ [Bazaikin, ..., Khachkova, 2017].

Пусть W_j и $\delta V'_j$ - объёмы компонент C_j , D'_j и $W = \sum_j W_j$. Тогда объёмное возмущение при переходе от невозмущенного порового пространства P к возмущенному P' составит $\delta W = \sum_j \delta V'_j$. Исходя из предположения, что

$$|\varphi(D'_j)| \leq E \delta V'_j,$$

где φ - топологический инвариант b_1 или χ , а E - некоторая константа, зависящая от структурных свойств порового пространства P , взвешенную топологическую характеристику возмущённого порового пространства можно представить в виде формулы [Bazaikin, ..., Khachkova, 2017]:

$$\bar{\varphi} + \delta \bar{\varphi} = \frac{\sum_{j=1}^N W_j \varphi(C_j) + \sum_{j=1}^{N'} \delta V'_j \varphi(D'_j)}{W + \delta W}.$$

В этом случае изменение рассматриваемой характеристики при переходе от невозмущенного порового пространства P к возмущенному P' можно оценить выражением:

$$\begin{aligned} |\delta \bar{\varphi}| &= \left| \frac{\sum_{j=1}^N W_j \varphi(C_j) + \sum_{j=1}^{N'} \delta V'_j \varphi(D'_j)}{W + \delta W} - \frac{\sum_{j=1}^N W_j \varphi(C_j)}{W} \right| \leq \\ & \left| \frac{W \sum_{j=1}^{N'} \delta V'_j \varphi(D'_j) - \delta W \sum_{j=1}^N W_j \varphi(C_j)}{W(W + \delta W)} \right| \leq \\ & \frac{\sum_{j=1}^{N'} \delta V'_j |\varphi(D'_j)|}{W} + \frac{\delta W}{W} |\bar{\varphi}| \leq (|\bar{\varphi}| + E \delta W) \frac{\delta W}{W}. \end{aligned}$$

Если $\delta W \ll W$, то при большом значении δW значение $\varphi(P')$ может быть большим, однако изменение взвешенного параметра $\delta\bar{\varphi}$ мало, следовательно, взвешенные топологические инварианты устойчивы к добавлению малых по объему компонент связности, то есть к шуму томографических изображений.

2.2.5 Проницаемость и извилистость порового пространства породы по результатам математического моделирования потоков флюида

В качестве основных транспортных параметров рассматриваются проницаемость горной породы при установившемся потоке и полном заполнении порового пространства флюидом, а также извилистость порового пространства [Bazaikin, ..., Khachkova, 2017]. Вторым параметром формально не определяется по геометрическим или топологическим параметрам порового пространства, но является общепризнанным и широко применяемым при построении математических моделей, описывающих распространение сейсмических волн во флюидонаполненных пористых средах, таких как модель Био [Biot, 1956a, b; Masson et al., 2007] или термодинамически согласованная пороупругая модель [Роменский, 2011].

Указанные параметры находятся решением дифференциальных уравнений Стокса для установившегося потока несжимаемой жидкости [Седов, 1970]:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \nabla p - \nu \Delta \vec{u} = 0, \quad \vec{x} \in P,$$

где \vec{u} - вектор скорости, p - давление, операторы $\nabla \cdot$, ∇ и Δ - дивергенция, градиент и Лапласиан соответственно, \vec{x} - вектор координат, P - поровое пространство и ν - коэффициент динамической вязкости флюида. На противоположных гранях цифровой модели образца определяется разница давлений при условии непротекания на всех остальных гранях и ребрах. Для численного решения этой задачи используется конечно-разностная схема второго порядка на сдвинутых сетках [Virieux, 1986], где ячейки сетки соответствуют вокселям цифровой модели горной породы, полученной по томографическому изображению образца песчаника. При таком решении предполагается, что давление определено в центрах ячеек сетки, то есть $p_{i,j,k} = p((x_1)_i, (x_2)_j, (x_3)_k)$, а компоненты вектора скорости определены в центрах граней ячеек, то есть $(u_1)_{i+1/2,j,k} = u_1((x_1)_{i+1/2}, (x_2)_j, (x_3)_k)$. При этом оставшиеся компоненты вектора скорости определяются циклической перестанов-

кой индексов. Затем вводятся конечно-разностные операторы, аппроксимирующие пространственные производные [Bazaikin, ..., Khachkova, 2017]:

$$D_1[f]_{I,J,K} = \frac{f_{I+1/2,J,K} - f_{I-1/2,J,K}}{h_1} = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{I,J,K} + O(h_1^2),$$

$$D_1^2[f]_{I,J,K} = \frac{f_{I+1,J,K} - 2f_{I,J,K} + f_{I-1,J,K}}{h_1^2} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|_{I,J,K} + O(h_1^2),$$

где f - достаточно гладкая функция. При этом нижние индексы, записанные заглавными буквами, могут быть целыми или полуцелыми. И наконец, с помощью введенных операторов аппроксимируются уравнения Стокса, записанные в декартовых координатах:

$$D_1[u_1]_{i,j,k} + D_2[u_2]_{i,j,k} + D_3[u_3]_{i,j,k} = 0,$$

$$D_1[p]_{i+1/2,j,k} - \nu \sum_{m=1}^3 D_m^2[u_1]_{i+1/2,j,k} = 0,$$

$$D_2[p]_{i,j+1/2,k} - \nu \sum_{m=1}^3 D_m^2[u_2]_{i,j+1/2,k} = 0,$$

$$D_3[p]_{i,j,k+1/2} - \nu \sum_{m=1}^3 D_m^2[u_3]_{i,j,k+1/2} = 0.$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений решается с применением итерационного метода установления. Детальное исследование свойств схемы, а также обоснование её использования выполнено Elman [Elman, 1999].

Зная значения вектора скорости и потока флюида в каждой точке порового пространства, можно вычислить проницаемость горной породы с использованием закона Дарси:

$$k = \frac{Q\nu L}{\Delta p S}, \quad (2.12)$$

где Q - поток флюида, ν - его вязкость, L - длина образца, Δp - перепад давления, S - площадь фильтрации. А извилистость порового пространства можно определить по формуле, выведенной Duda с коллегами [Duda et al., 2011]:

$$T_j = \frac{\int_W \|\vec{u}(x)\| dW}{\int_W u_j(x) dW}, \quad (2.13)$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ - вектор скорости, W - общий объём порового пространства и T_j - извилистость порового пространства вдоль направления x_j . По полученным в каждом направлении значениям проницаемости и извилистости порового про-

странства определяется, зависят ли указанные параметры от направления потока, т.е. является ли порода гидравлически изотропной.

2.3 Алгоритм оценки параметров, репрезентативного объёма и оптимального разрешения томографических изображений на примере образца песчаника

В качестве входных данных разработанного алгоритма используются изображения образца песчаника обнажения Берсимер (Австралия), отсканированные и предоставленные коллегами из Университета Австралии (Curtin University, Perth, Australia). Сканирование сухого образца цилиндрической формы диаметром 5 мм и длиной 14 мм выполнено с использованием рентгеновского микроскопа VersaXRM-500 (Zeiss-Xradia Ltd) при напряжении 60 кВ с разным разрешением: 24.50, 5.58, 3.44 и 0.98 мкм на воксель.

Для каждого из четырёх полученных наборов полутоновых изображений создается цифровая модель образца горной породы: изображения сначала численно обрезаются для удаления краевых эффектов (Рисунок 2.3 а), затем методом нелокального среднего фильтруется высокочастотный шум (Рисунок 2.3 б), после чего методом Отсу выполняется бинарная сегментация (Рисунок 2.3 в) [Базайкин, ..., Хачкова, 2016]. После указанной обработки получается четыре трёхмерных би-

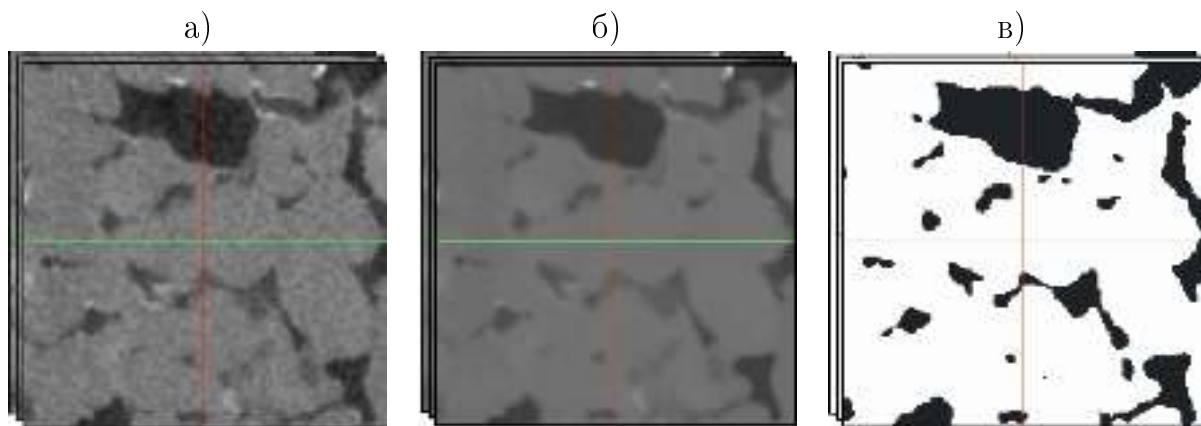


Рисунок 2.3 – Сечения трехмерного изображения образца песчаника обнажения Берсимер (Австралия) по результатам численной обработки

а) набор полутоновых изображений с шумом после удаления краевых эффектов, б) набор изображений после фильтрации методом нелокального среднего, в) набор изображений после бинарной сегментации методом Отсу

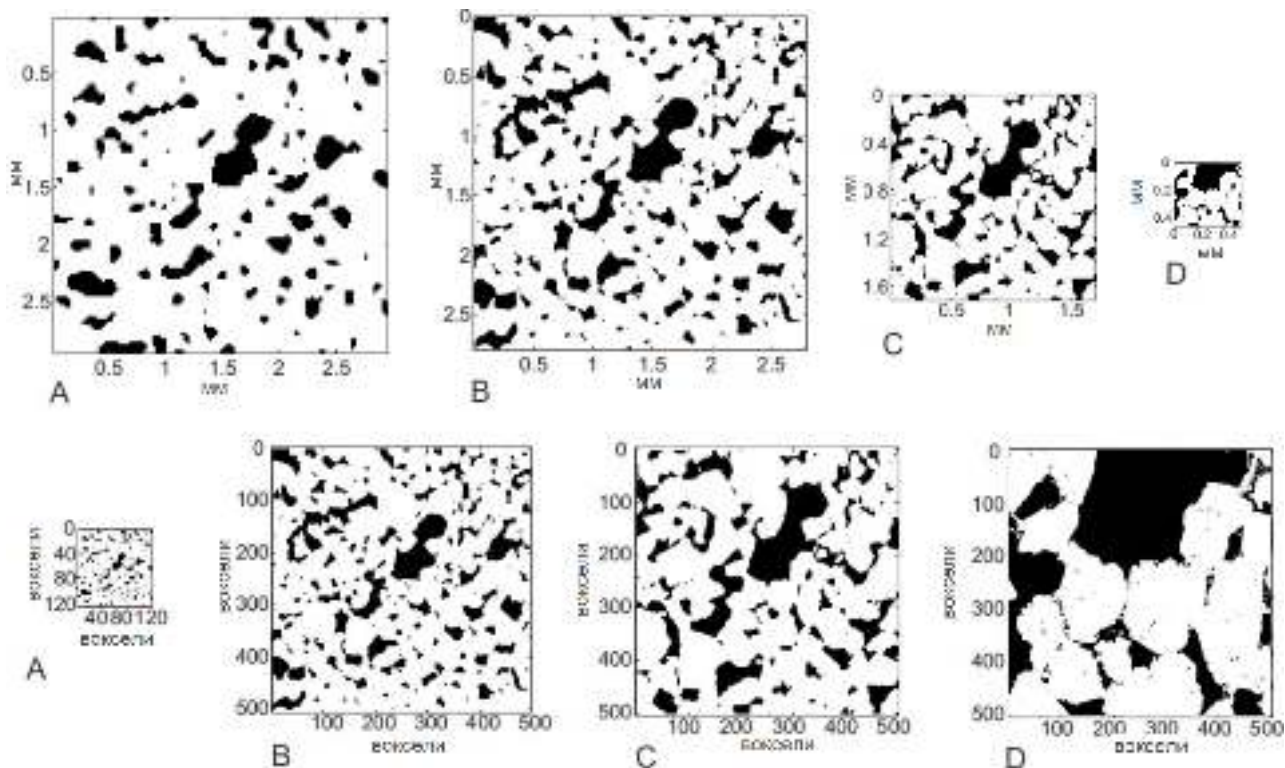


Рисунок 2.4 – Сечения трёхмерных бинарных моделей образца песчаника обнажения Берсимер в зависимости от разрешения съёмки (размера вокселя)

A - 24.50 мкм, B - 5.58 мкм, C - 3.44 мкм, D - 0.98 мкм.

Черный цвет - поры, белый - скелет.

Изображения в масштабе: вверху - в миллиметрах, внизу - в вокселях

Таблица 2.1 – Размеры цифровых моделей породы в миллиметрах и вокселях при разных разрешениях томографической съёмки образца песчаника обнажения Берсимер

Модель	Разрешение (мкм)	Размер (воксели)	Размер (мм)
A	24.50	120 × 120 × 500	2.94 × 2.94 × 12.25
B	5.58	500 × 500 × 500	2.79 × 2.79 × 2.79
C	3.44	500 × 500 × 500	1.72 × 1.72 × 1.72
D	0.98	500 × 500 × 500	0.49 × 0.49 × 0.49

нарных модели образца песчаника (Рисунок 2.4 A, B, C и D) для численной оценки параметров породы (Таблица 2.1) [Bazaikin, ..., Khachkova, 2017].

На сечениях трёхмерных бинарных моделей образца песчаника обнажения Берсимер (Рисунок 2.4) [Bazaikin, ..., Khachkova, 2017] видно, что модель D с наи-

высшим разрешением из представленных имеет наименьший реальный размер в миллиметрах, отражая очень маленькую часть образца, репрезентативность которой сомнительна, тогда как модель А самого большого размера в миллиметрах имеет малый размер в вокселях $120 \times 120 \times 500$, при этом очевидна потеря детальности изображения. Рисунок наглядно показывает прямую зависимость между разрешением съёмки и размером представляемой части исследуемого образца.

В соответствии с постановкой задачи и схемой алгоритма (Рисунок 2.1) по каждой бинарной модели А, В, С и D сначала определяется её репрезентативный объём для оценки конкретного параметра по результатам статистического анализа его значений для вложенных моделей образца меньшего размера. После этого рассматривается зависимость оценки параметров от разрешения съёмки, исследуются искажения при построении макроскоростной эффективной модели порупругой среды в связи с разным разрешением и, наконец, по результатам анализа топологических инвариантов моделей определяется оптимальное разрешение томографических изображений.

2.3.1 Репрезентативный объём цифровой модели породы по результатам статистического анализа параметров вложенных моделей

Для численной оценки параметров образца породы с высокой точностью необходим репрезентативный объём цифровой модели, который, будучи малым, содержит все его микроструктурные элементы и отражает свойства породы в целом. Определение репрезентативности объёма для каждой цифровой модели образца начинается с её разбиения на более мелкие, после чего для каждого конкретного параметра выполняется статистический анализ вычисляемых значений для наборов вложенных моделей. При этом используется понятие "статистически репрезентативный объём", или SREV (от английского *statistically representative elementary volume*) [Zhang et al., 2000]: объём модели статистически репрезентативен, если стандартное отклонение значений параметра, полученных для всех реализаций, т.е. для всех моделей образца породы данного объёма, не превышает 10% от среднего значения.

Чтобы получить наборы цифровых моделей меньшего объёма, трёхмерная модель образца на каждом шаге разделяется на две или три части в каждой плос-

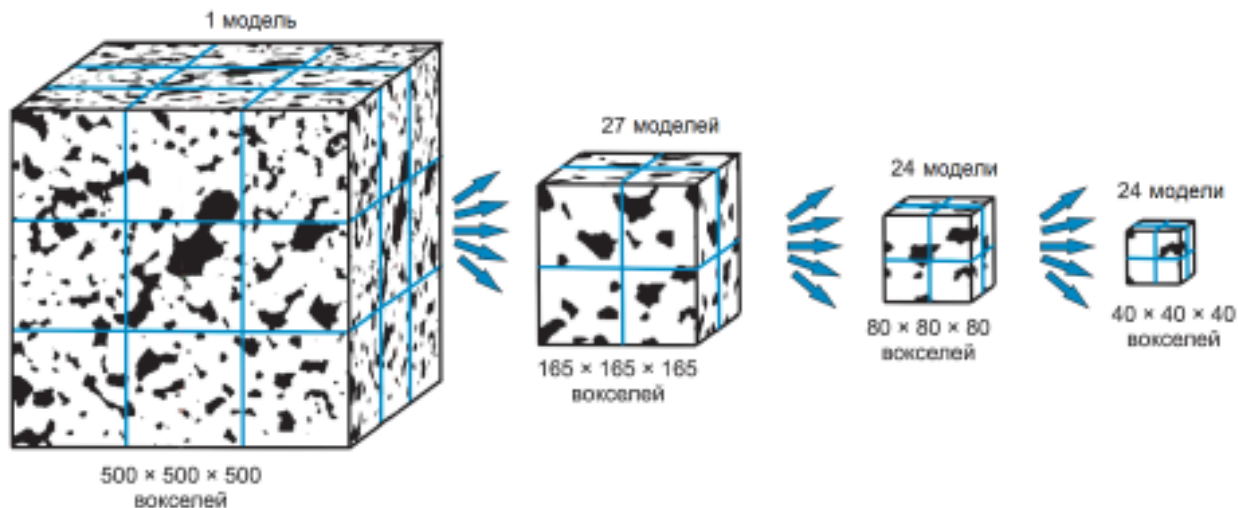


Рисунок 2.5 – Схема разбиения трёхмерной цифровой модели породы для статистического анализа параметров образцов разного объёма

кости (Рисунок 2.5) [Базайкин, ..., Хачкова, 2016]. Например, если исходная модель объёмом $500 \times 500 \times 500$ вокселей одна, то моделей объёмом $165 \times 165 \times 165$ - 27, при делении трёх из них на восемь частей в соответствии с приведенной схемой моделей объёмом $80 \times 80 \times 80$ вокселей уже 24. Если три из них разбить далее, как показано на схеме, то моделей объёмом $40 \times 40 \times 40$ становится тоже 24. Если исходная цифровая модель меньшего объёма, например $120 \times 120 \times 500$ вокселей, то при её разбиении объёмы полученных вложенных моделей будут другие: $120 \times 120 \times 120$ вокселей - 4 модели, $40 \times 40 \times 40$ - 27, $20 \times 20 \times 20$ - 24, $10 \times 10 \times 10$ - 24 модели.

Далее для полученных наборов цифровых моделей разного объёма последовательно определяются значения каждого параметра: длины корреляции индикаторной функции пространственного распределения пор, пористости образца горной породы, геометрических параметров (удельной площади и средней кривизны поверхности раздела скелет—поры), топологических (чисел Бетти и Эйлеровой характеристики) и транспортных (проницаемости и извилистости порового пространства). По результатам расчётов для всех моделей строятся графики зависимости этих параметров от линейного размера модели как в миллиметрах, так и в вокселях, при этом используются средние значения по наборам моделей одного объёма и стандартные отклонения от среднего в виде численных интервалов. После чего выполняется статистический анализ для определения того объёма цифровой модели, после которого рассматриваемый параметр стабилизируется, т.е. его

стандартное отклонение уже не превосходит 10% от среднего значения.

2.3.2 Длина корреляции индикаторной функции пространственного распределения скелета и пор

Функция ковариации и длина корреляции вычисляются по формулам (2.1)-(2.2) по набору цифровых моделей А, В, С, D разного объёма и разрешения, затем определяются средние значения на наборах одинакового объёма, стандартные отклонения от среднего и строятся графики зависимости длины корреляции в вокселях и микрометрах от линейного размера моделей в вокселях и миллиметрах соответственно.

На графиках (Рисунок 2.6) [Vazaikin, ..., Khachkova, 2017] видно, что самая детальная модель D не является репрезентативной для оценки параметра, так как длина корреляции не стабилизируется (в отличие от стабилизирующегося значения этого параметра для моделей А, В и С), хотя на нижнем графике (Рисунок 2.6 б) видно, что максимальный физический объём модели этого разрешения незначительно меньше репрезентативного, и длина корреляции в этом случае близка к значениям, полученным для моделей В и С другого разрешения. При этом объёмы остальных моделей (165^3 вокселей - для В и С и 40^3 вокселей - для А) близки к статистически репрезентативным: стандартное отклонение составляет 7-13%, а длина корреляции, начиная с этого объёма, стабилизируется.

Из анализа графиков (Рисунок 2.6 а) на предмет зависимости длины корреляции от разрешения съёмки следует, что значение этого параметра в вокселях уменьшается с понижением разрешения. Однако длины корреляции в микрометрах, представляющие физический размер (Рисунок 2.6 б), для моделей В, С, D разного разрешения близки друг к другу. При этом оценка длины корреляции для модели А значительно выше из-за низкого разрешения съёмки и недостаточной детальности.

Поскольку для корректной оценки параметра, как указано в постановке задачи, необходимы репрезентативный объём модели и хорошее разрешение съёмки, отражающее микронеоднородность образца породы, то модель А не подходит для рассмотрения, так как не сохраняет детальность, а модель D не является репрезентативной для рассматриваемого параметра. В то время как модели В и С удо-

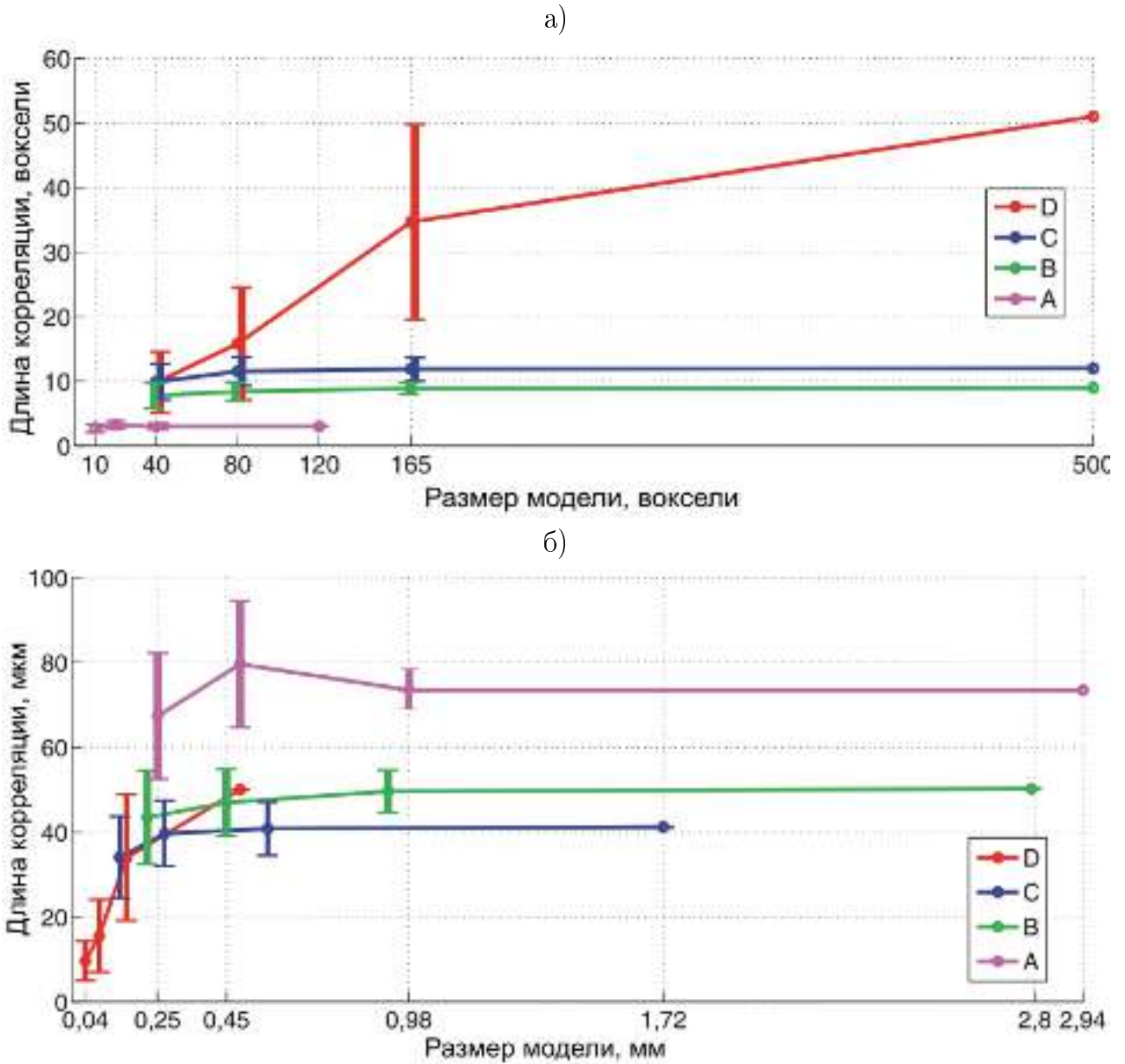


Рисунок 2.6 – Длина корреляции индикаторной функции пространственного распределения пор в вокселях (а) и микрометрах (б) в зависимости от линейного размера цифровой модели образца песчаника в вокселях (а) и миллиметрах (б): средние значения по наборам моделей и стандартные отклонения от среднего

влетворяют этим требованиям. При этом оцененная длина корреляции составляет 9 вокселей (50 мкм) для образца В и 12 вокселей (41,2 мкм) для образца С, т.е. разница в значениях составляет примерно 20% при изменении разрешения с 5.58 на 3.44 мкм на воксель, что указывает на неустойчивость оценки этого параметра относительно изменения разрешения съёмки и требует определения оптимального разрешения.

Итак, для анализируемого песчаника длина корреляции индикаторной функции пространственного распределения пор составляет 41—50 мкм. Эта оценка статистически определяется для изображений с разрешением более 8 вокселей на длину корреляции (3—6 мкм на воксель). Кроме того, статистически репрезентативный объём для оценки этого параметра должен быть больше, чем 14 длин корреляции (около 130—170 вокселей или примерно 0.7—1.0 мм).

2.3.3 Геометрические параметры структуры песчаника по результатам статистического анализа значений функционалов Минковского

Для оценки геометрических параметров песчаника по четырём наборам бинарных моделей А, В, С и D разного объёма и разрешения сначала по формулам (2.3), (2.10) вычисляется общая пористость породы и строятся графики зависимости значений от линейного размера модели в вокселях и миллиметрах. На графиках (Рисунок 2.7) [Bazaikin, ..., Khachkova, 2017] видно, что значение параметра стабилизируется с увеличением объёма модели, стандартное отклонение составляет примерно 7—13% от среднего значения при объёме 165^3 вокселей для моделей В и С (40^3 вокселей для модели А), т.е. указанные объёмы близки к статистически репрезентативным. В то время как для модели D при объёме 165^3 вокселей стандартное отклонение составляет порядка 30% от среднего, что объясняется наличием одной большой поры и частей нескольких зерен (Рисунок 2.4). Следовательно, такой объём не репрезентативен.

При этом значения общей пористости, полученные для моделей А и D, почти в два раза выше по сравнению со значениями, вычисленными для моделей В и С: в случае модели D - из-за нерепрезентативности объёма, а для модели А - из-за слишком низкого разрешения, при котором, с одной стороны, теряется детальность, а с другой стороны, большой воксель является причиной существенной ошибки в округлении. На графиках (Рисунок 2.7) видно, что различие полученных для моделей В и С значений составляет порядка 15%, что подтверждает зависимость рассчитываемых значений от разрешения съёмки и необходимость выбора оптимального разрешения.

Таким образом, результаты вычислений показывают, что общая пористость песчаника составляет 19—22%, а репрезентативный объём для корректной оценки

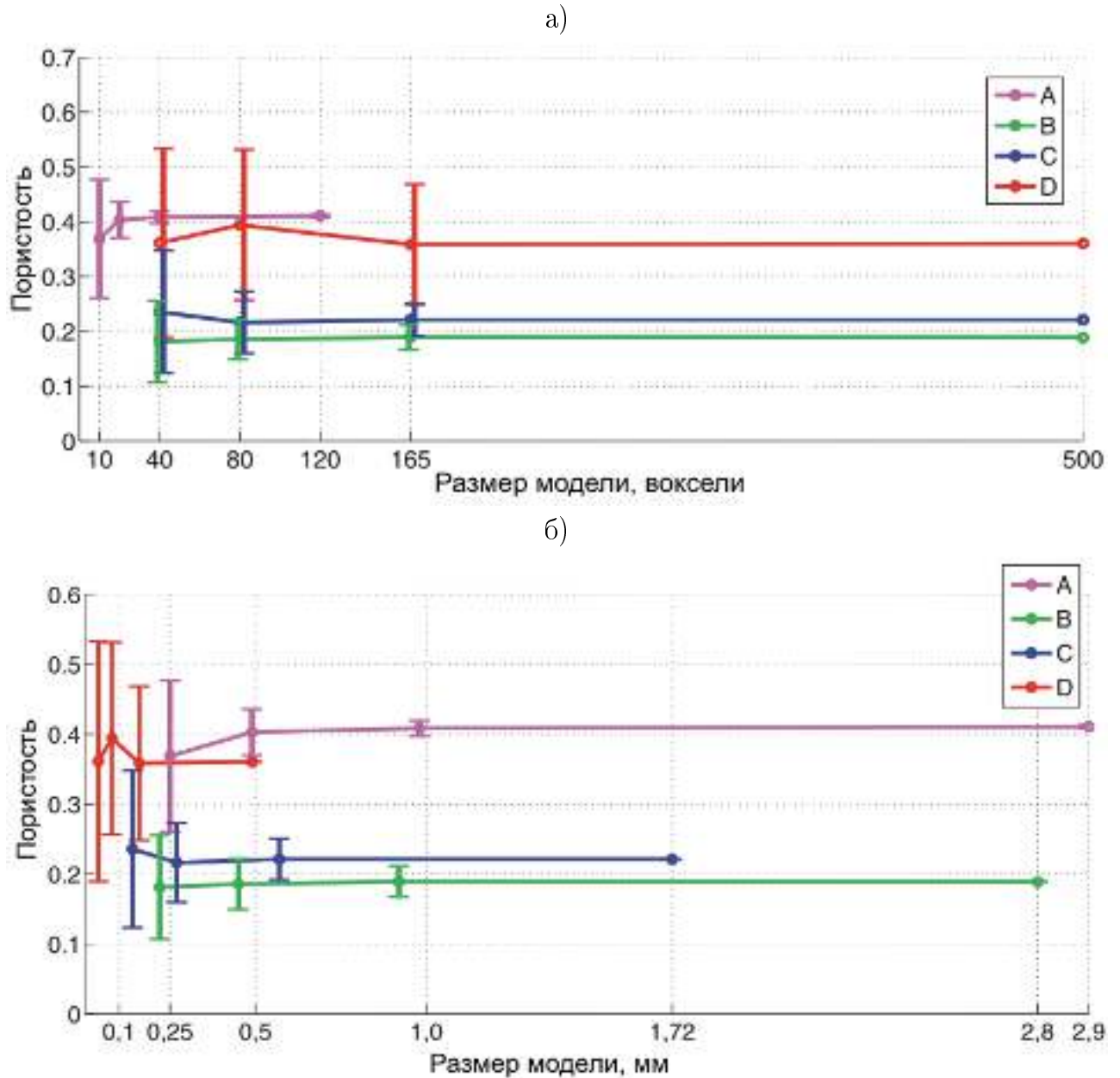


Рисунок 2.7 – Пористость песчаника в зависимости от линейного размера цифровой модели образца в вокселях (а) и миллиметрах (б): средние значения и стандартные отклонения от среднего

этого параметра 0.7–1.0 мм при разрешении съёмки 3–6 мкм на воксель. Причем более точная оценка значения общей пористости возможна при установлении оптимального разрешения.

Затем для каждого набора цифровых моделей образца по формулам (2.8), (2.10) вычислением функционала Минковского m_1 оценивается удельная площадь поверхности раздела скелет–поры, а средняя кривизна этой поверхности - вычислением функционала m_2 .

На графиках (Рисунки 2.8, 2.9) [Bazaikin, ..., Khachkova, 2017] видно, что и удельная площадь, и средняя кривизна поверхности раздела скелет—поры, рассчитанные для модели D, на несколько порядков отличаются от параметров, полученных для остальных моделей, поскольку более высокое разрешение увеличивает

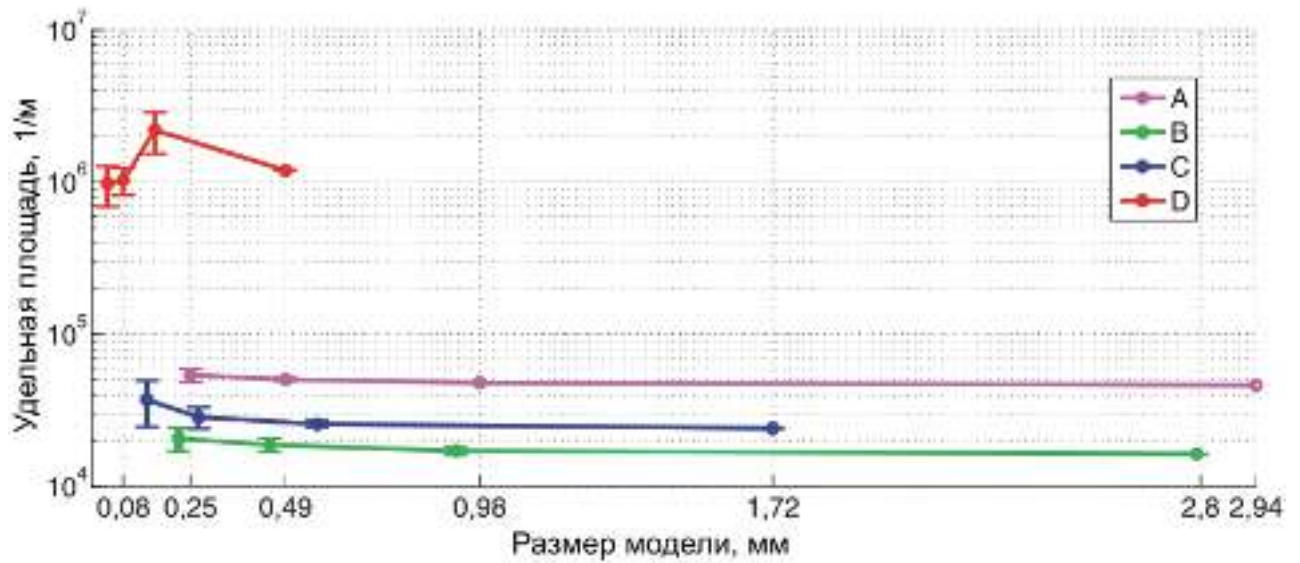


Рисунок 2.8 – Удельная площадь поверхности раздела скелет—поры в логарифмической шкале в зависимости от линейного размера цифровой модели образца в миллиметрах: средние значения и стандартные отклонения от среднего

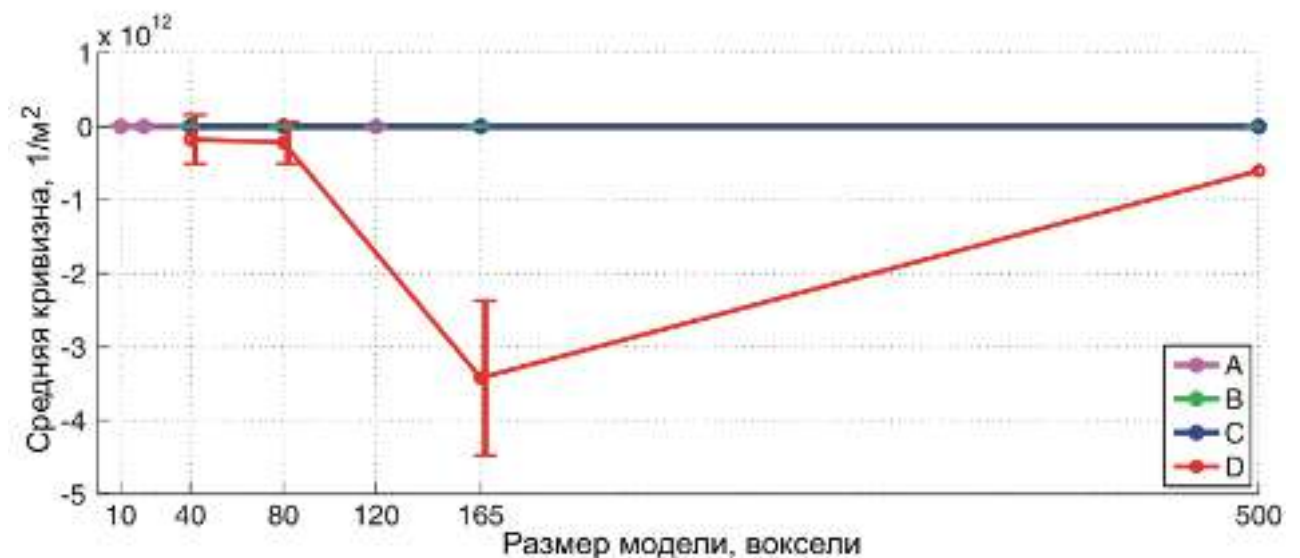
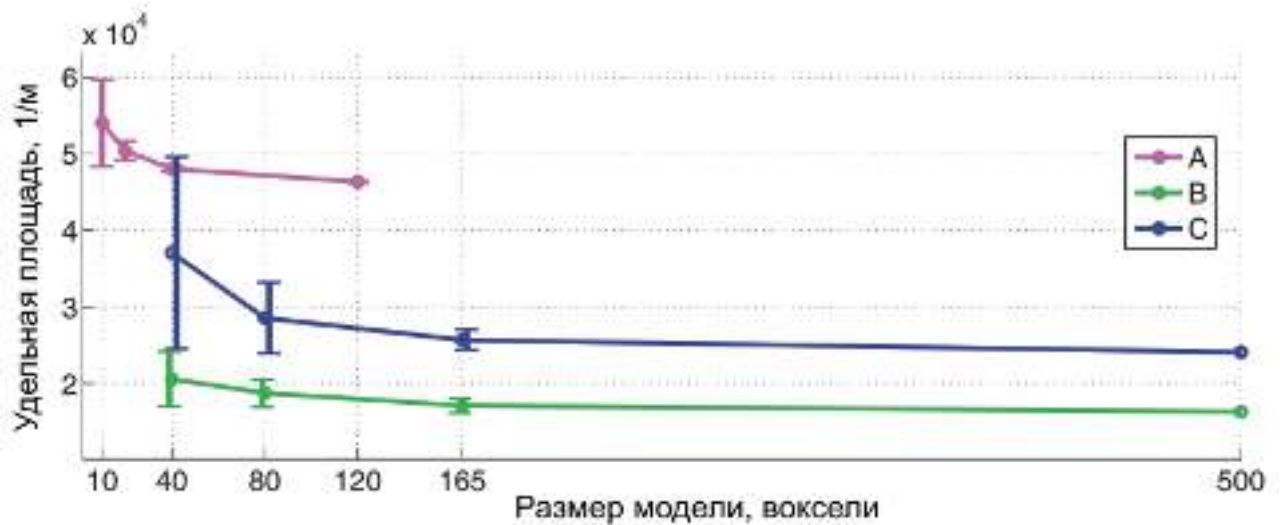


Рисунок 2.9 – Средняя кривизна поверхности раздела скелет—поры в зависимости от линейного размера цифровой модели образца в вокселях: средние значения и стандартные отклонения от среднего

детальность шероховатой зернистой поверхности. Однако, как и для предыдущих параметров, подтверждается нерепрезентативность объёма этой модели, поскольку значения указанных параметров не стабилизируются, а стандартное отклонение составляет 28–30% от среднего значения.

Геометрические параметры поверхности раздела скелет–поры для остальных моделей рассматриваются в приближении (Рисунки 2.10, 2.11) [Bazaikin, ..., Khashkova, 2017]. Из анализа графиков следует, что репрезентативным объёмом для удельной площади поверхности раздела скелет–поры можно считать 165^3 вок-

а)



б)

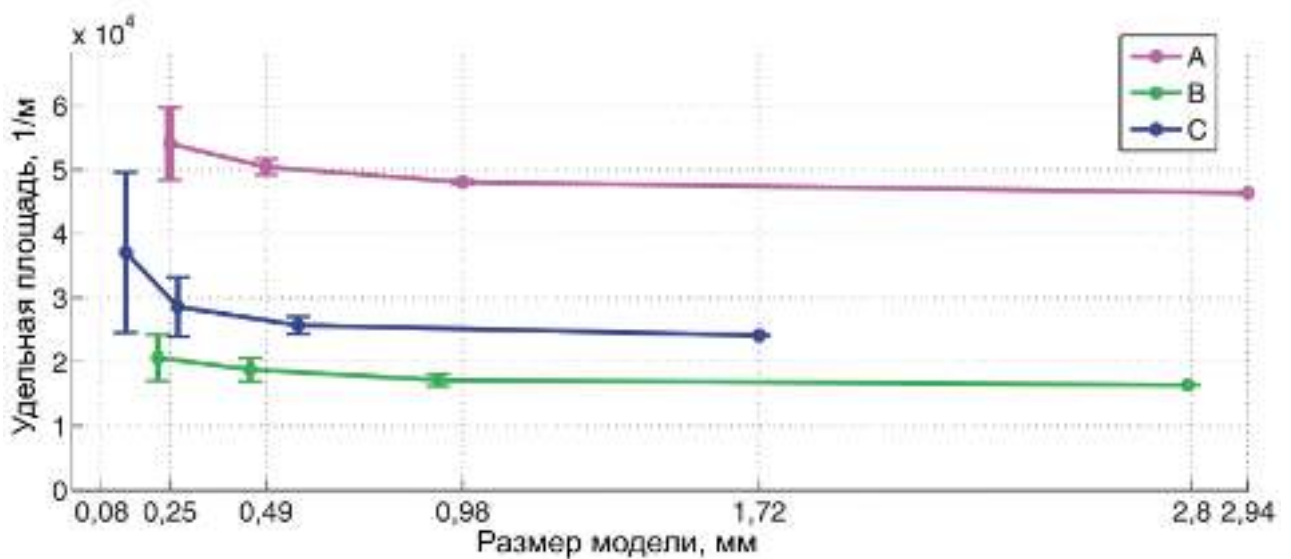
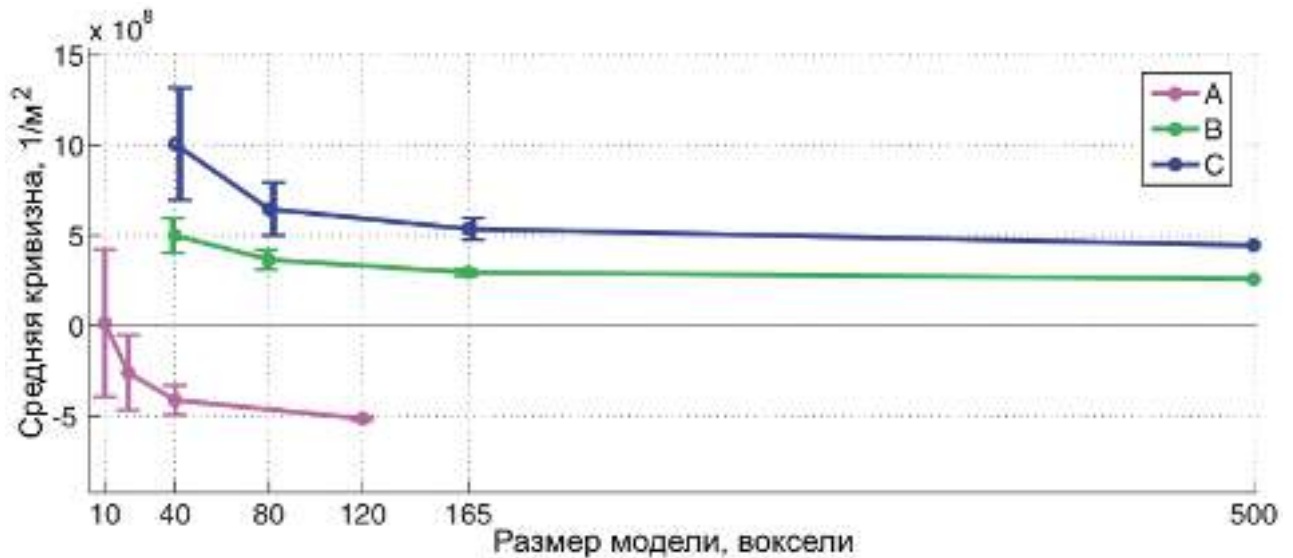


Рисунок 2.10 – Удельная площадь поверхности порового пространства породы в зависимости от линейного размера цифровой модели образца в вокселях (а) и миллиметрах (б): средние значения и стандартные отклонения от среднего

селей (40^3 для модели А) или порядка 0.7–1.0 мм (примерно 15 длин корреляции), так как значения после этого объёма стабилизируются и стандартное отклонение от среднего значения составляет менее 6%. Для средней кривизны указанной поверхности 165^3 вокселей можно считать репрезентативным объёмом только для моделей В и С (стандартное отклонение меньше 11%), поскольку для модели А и значения не стабилизируются, и стандартное отклонение от среднего значения по объёму 40^3 составляет 20%.

а)



б)

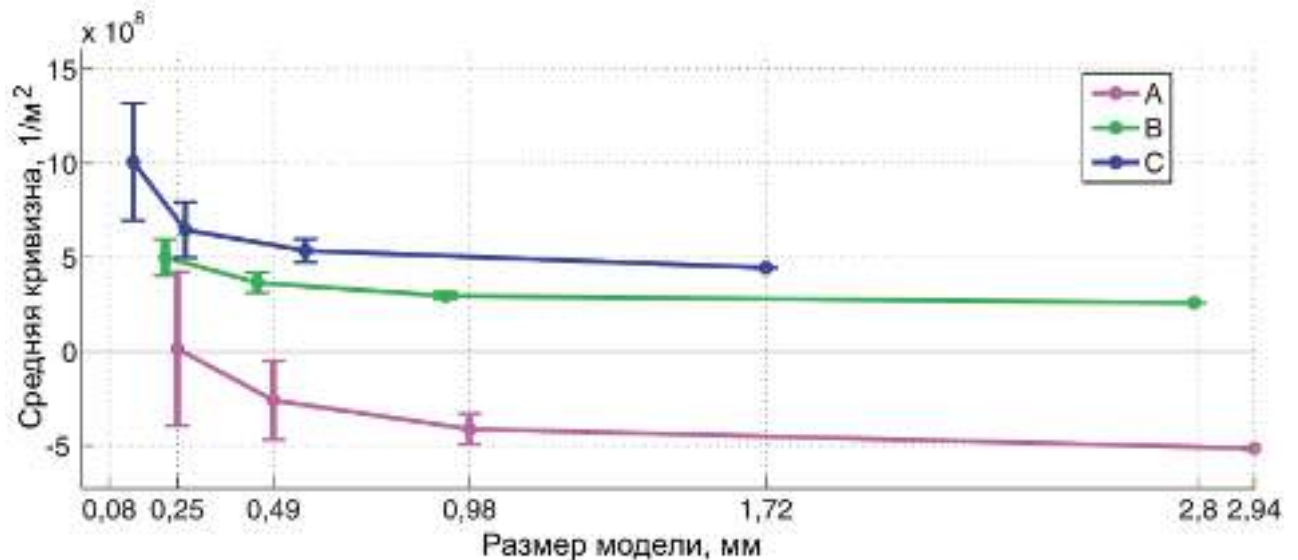


Рисунок 2.11 – Средняя кривизна границы раздела скелет–поры в зависимости от линейного размера цифровой модели образца в вокселях (а) и миллиметрах (б): средние значения и стандартные отклонения от среднего

При этом значения вычисленных функционалов Минковского чувствительны к разрешению изображения, так как разница в этих оценках для моделей, полученных с разным разрешением съёмки (В и С), составляет 30—38%, что в очередной раз требует установления оптимального разрешения.

2.3.4 Проницаемость и извилистость порового пространства, репрезентативность цифровых моделей песчаника разного масштаба

Для оценки транспортных параметров песчаника обнажения Берсимер по четырём наборам цифровых моделей А, В, С и D разного разрешения и объёма по формулам (2.12), (2.13) рассчитываются проницаемость, извилистость порового пространства и строятся графики их зависимости от линейного размера модели в вокселях и миллиметрах (Рисунки 2.12 и 2.13) [Bazaikin, ..., Khachkova, 2017].

На графиках зависимости проницаемости песчаника от линейного размера модели образца (Рисунок 2.12) видно, что значение параметра не стабилизируется при увеличении размера модели и стандартное отклонение превышает 10%. Следовательно, рассматриваемые объёмы вплоть до 500^3 вокселей не являются репрезентативными для оценки проницаемости этой породы. При этом оценка проницаемости для бинарной модели А значительно выше оценок этого параметра, полученных для остальных цифровых моделей, из-за недостаточного разрешения. А оценки проницаемости для моделей В, С и D, хотя и близки друг к другу при линейном размере моделей 165 вокселей (разница между средними показателями порядка 10%), но значительно отличаются (до 60%) при размере моделей 500 вокселей. Если же сравнить проницаемость моделей В и С, то разница между средними показателями меньше - 10—17%. Но и это указывает на зависимость оценки проницаемости песчаника от разрешения томографических изображений.

На графиках зависимости извилистости порового пространства песчаника от линейного размера образца (Рисунок 2.13) видно, что для моделей А, В и D значение этого параметра также не стабилизируется, хотя стандартное отклонение при размере 165 вокселей для модели В (40 вокселей для модели А) и составляет порядка 6—10%, но при размере 165 вокселей для модели D - 18%. А для модели С отмечается и стабилизация значения, и строгое попадание в десятипроцентный интервал. Следовательно, для цифровой модели С песчаника репрезентативным

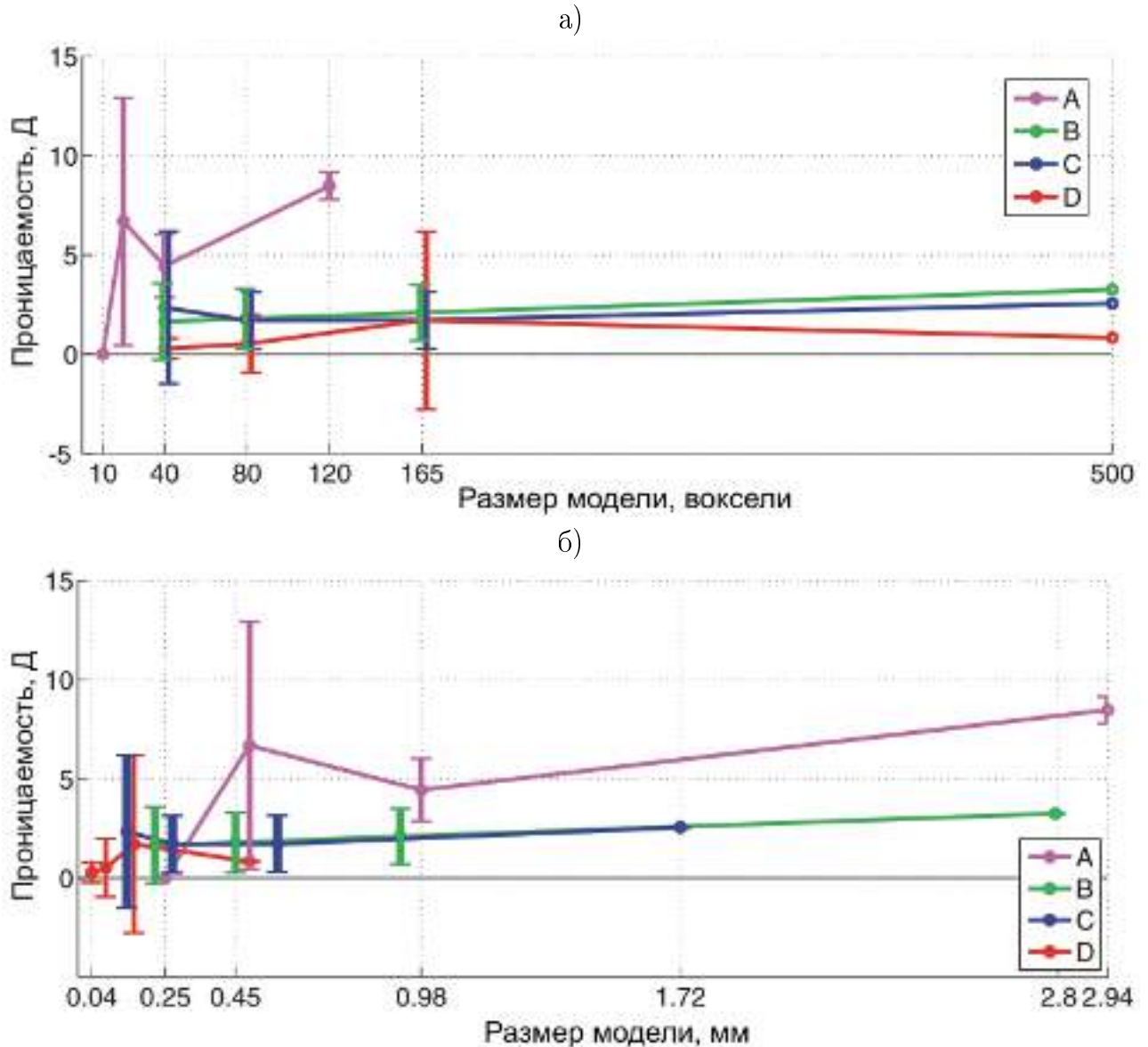


Рисунок 2.12 – Проницаемость песчаника в зависимости от линейного размера модели образца в вокселях (а) и миллиметрах (б): средние значения и стандартные отклонения от среднего

объёмом для оценки извилистости можно считать 165^3 вокселей. При сравнении вычисленной извилистости порового пространства моделей В и С видно, что разница составляет порядка 20%, а разница извилистости моделей более высокого и более низкого разрешения еще больше, что также указывает на необходимость выбора подходящего разрешения.

Итак, вычисленная проницаемость образца составляет около 2–3 Дарси, а извилистость его порового пространства - около 1.7–1.8. Исследование показывает, что для более точной оценки транспортных параметров необходимо определение

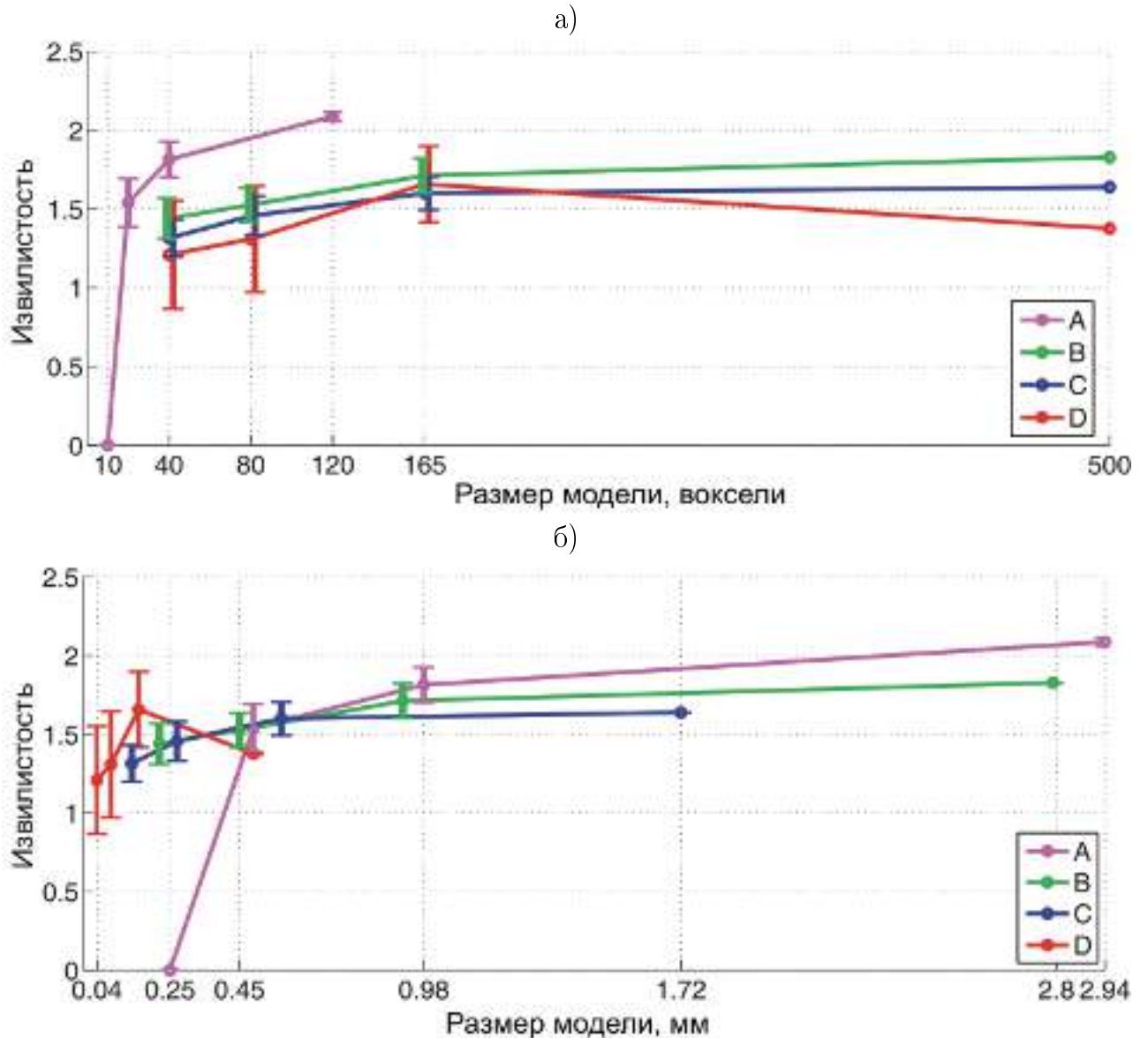


Рисунок 2.13 – Извилистость порового пространства песчаника в зависимости от линейного размера модели образца в вокселях (а) и миллиметрах (б): средние значения и стандартные отклонения от среднего

оптимального разрешения томографических изображений и, желательно, их большие объёмы.

2.3.5 Влияние масштаба томографического изображения на оценку параметров макроскоростной эффективной модели пороупругой среды

Для определения погрешности оценки параметров макроскоростной эффективной модели пороупругой среды морфологические и транспортные параметры песчаника, вычисленные по его томографическим изображениям разного масшта-

ба (разрешения и объёма), используются в системе уравнений Био [Carcione, 2010; Masson, 2010], которая описывает математическую модель физической системы - распространение сейсмических волн во флюидонасыщенной пористой среде - в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho_f \frac{T}{\varphi} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\eta}{k_0} q &= -\nabla p - \rho_f \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma - \rho_f \frac{\partial q}{\partial t}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= (\lambda_u \nabla \cdot v + \alpha M \nabla \cdot q) I + \mu [\nabla v + (\nabla v)^T], \\ -\frac{\partial p}{\partial t} &= M(\alpha \nabla \cdot v + \nabla \cdot q). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь φ - пористость, v - скорость смещения твердой фазы, v_f - скорость смещения жидкости, $q = \varphi(v_f - v)$ - относительная скорость смещения жидкости, σ - тензор напряжений в твердой породе, p - давление жидкости, ρ_s - плотность скелета, ρ_f - плотность жидкости, $\rho = (1 - \varphi)\rho_s + \varphi\rho_f$ - плотность флюидозаполненной породы, T - извилистость, η - вязкость жидкости, k_0 - проницаемость, λ_u - параметр Ламе, соответствующий флюидозаполненной породе, μ - модуль сдвига, α и M - пороупругие константы Био, которые выражаются через модули объёмного сжатия для сухой породы K_d , для флюидозаполненной породы K_u и для минерального вещества K_s , образующего скелет, по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \lambda_u &= K_u - \frac{2\mu}{3} = K_d + \alpha^2 M - \frac{2\mu}{3}, \\ \alpha &= (1 - \frac{K_d}{K_u})/B = 1 - \frac{K_d}{K_s}, \\ M &= \frac{BK_u}{\alpha}. \end{aligned}$$

Здесь B - параметр Био, который используется для определения упругих параметров флюидозаполненной породы в модели Гассмана [Gassmann, 1951]:

$$B = \frac{1/K_d - 1/K_s}{1/K_d - 1/K_s + \varphi(1/K_f - 1/K_s)}, \quad K_u = \frac{K_d}{1 - B(1 - K_d/K_s)}, \quad (2.15)$$

где K_f - модуль объёмного сжатия флюида.

Для расчета модуля объёмного сжатия сухой породы через упругие свойства зёрен и пористость используется эмпирическое соотношение [Krief et al., 1990]:

$$K_d = K_s(1 - \varphi)^{3/(1-\varphi)}, \quad \mu_d = \frac{K_d}{K_s} \mu_s. \quad (2.16)$$

Рассматриваемый образец песчаника обнажения Берсимер мономинерален,

его зёрна – это кристаллы кварца с параметрами $\rho = 2650 \text{ кг/м}^3$, $K_s = 37 \text{ ГПа}$, $\mu_s = 44 \text{ ГПа}$. По формуле (2.16) сначала рассчитываются упругие параметры сухой породы для цифровых моделей В и С образца, построенных по изображениям с разным разрешением томографической съёмки (Таблица 2.2) [Базайкин, ..., Хачкова, 2016]. Затем по формулам (2.15) рассчитываются параметры флюидона-

Таблица 2.2 – Упругие параметры сухой породы по результатам расчёта для цифровых моделей В и С образца песчаника с разным разрешением томографической съёмки

Мо- дель	Размер вок- селя (мкм)	Порис- тость (%)	Плот- ность (кг/м ³)	Модуль объём- ного сжатия (ГПа)	Модуль сдвига (ГПа)	Скорость про- дольной волны (м/с)	Скорость попе- речной волны (м/с)
В	5.58	18	2173	17.901	21.288	4615	3130
С	3.44	22	2067	14.229	16.921	4219	2816

сыщенной породы при условии полного заполнения пустот нефтью с плотностью $\rho = 870 \text{ кг/м}^3$, модулем объёмного сжатия $K_f = 18 \text{ ГПа}$ и динамической вязкостью $\eta = 0.0089 \text{ Па}\cdot\text{с}$ (Таблица 2.3) [Базайкин, ..., Хачкова, 2016]. При этом скорости

Таблица 2.3 – Параметры флюидонасыщенной породы по результатам расчёта для цифровых моделей В и С образца песчаника с разным разрешением томографической съёмки

Мо- дель	Размер вок- селя (мкм)	Плот- ность (кг/м ³)	Модуль объём- ного сжа- тия (ГПа)	Модуль сдвига (ГПа)	Скорость продоль- ной волны (м/с)	Скорость попереч- ной волны (м/с)	Прони- цае- мость (Д)	Изви- лис- тость (б/р)
В	5.58	2330	31.861	21.288	5085	3030	3.2	1.83
С	3.44	2258	30.762	16.921	4859	2737	2.55	1.64

сейсмических волн для сухой и флюидонасыщенной породы, рассчитанные через модули объёмного сжатия, модули сдвига и плотность породы, соответствуют скоростям в предельном случае модели Био при частоте, стремящейся к нулю. На-

конец, при полученных параметрах решается система уравнений Био (2.14) для определения скорости сейсмических волн во флюидонасыщенной пористой среде в зависимости от частоты (Рисунок 2.14) [Базайкин, ..., Хачкова, 2016].

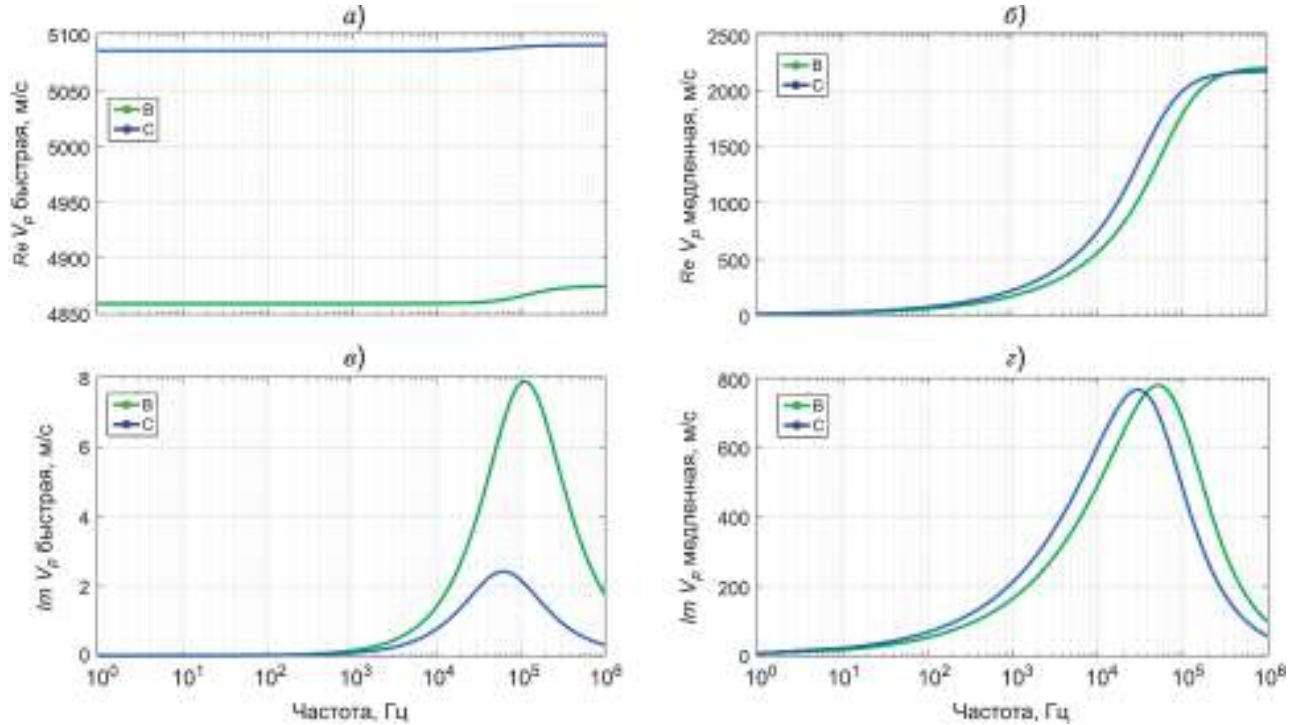


Рисунок 2.14 – Вещественная (а, б) и мнимая (в, г) части скорости быстрой (а, в) и медленной (б, г) продольной волны в зависимости от частоты для цифровых моделей В и С флюидонасыщенной пороупругой среды

Из анализа рассчитанных значений упругих параметров для сухой и флюидонасыщенной породы (Таблицы 2.2, 2.3) следует, что погрешность порядка 15% в определении пористости породы, связанная с разным разрешением томографической съёмки, приводит к погрешности порядка 5–11% в определении скорости сейсмических волн для сухой и флюидонасыщенной породы. А на графиках зависимости скорости сейсмических волн во флюидонасыщенной пористой среде от частоты (Рисунок 2.14) [Базайкин, ..., Хачкова, 2016] видно, что различие значений скорости волн всех типов также достигает 10% во всем диапазоне изменения частоты, что обусловлено указанной погрешностью в определении параметров сухой породы. При этом её влияние на оценку транспортных параметров песчаника проявляется на частотах, близких к частоте Био: происходит сдвиг пика (максимума значения скорости) по частоте с изменением его величины.

Таким образом, погрешность определения скорости сейсмических волн при

построении макроскоростной эффективной модели пороупругой среды, связанная с изменением разрешения томографической съёмки с 3.44 на 5.58 мкм на воксель, достигает 10%, что указывает на необходимость определения оптимального разрешения.

2.3.6 Оптимальное разрешение томографических изображений песчаника по результатам анализа топологических инвариантов его цифровых моделей разного масштаба

Для определения оптимального разрешения томографической съёмки по наборам цифровых моделей А, В, С и D разного объёма и разрешения вычисляются топологические инварианты - числа Бетти, Эйлерова характеристика и их взвешенные значения по формулам (2.11), после чего строятся графики их зависимости от линейного размера модели.

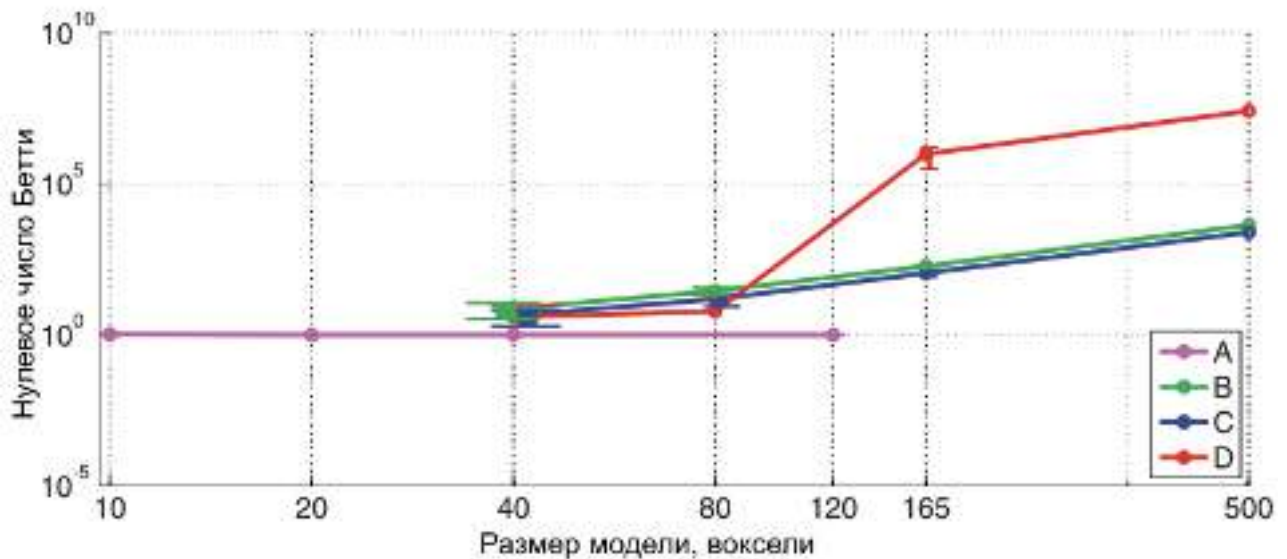


Рисунок 2.15 – Нулевое число Бетти в логарифмической шкале в зависимости от линейного размера модели образца в вокселях: средние значения и стандартные отклонения от среднего

На графиках (Рисунки 2.15–2.17) [Bazaikin, ..., Khachkova, 2017] видно, что для модели А значения нулевого числа Бетти b_0 постоянны, равны единице ($b_0 = 1$) и являются самыми малыми среди четырёх рассмотренных моделей образца песчаника. При этом первое число Бетти b_1 для этой модели достаточно высокое (от 50 до 10^5), а Эйлерова характеристика отрицательная, из чего следует, что поровое пространство модели А имеет только одну компоненту связности с большим

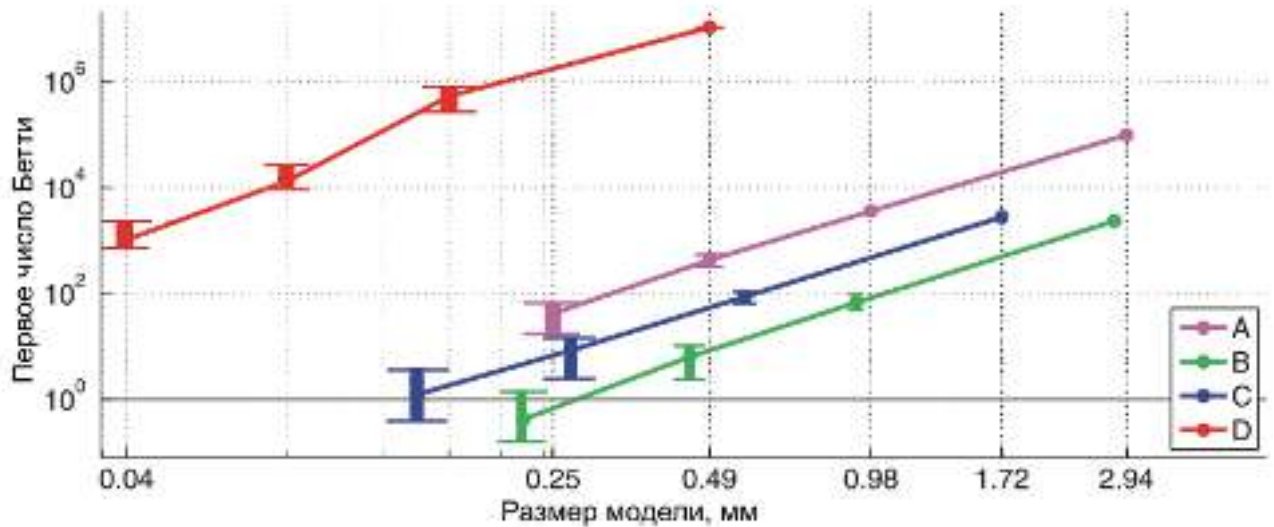


Рисунок 2.16 – Первое число Бетти в логарифмической шкале в зависимости от линейного размера модели образца в миллиметрах: средние значения и стандартные отклонения от среднего

количеством "туннелей".

Разрешение модели В выше, и из анализа графиков (Рисунки 2.15–2.18) следует, что в её структуре много изолированных пор, судя по резкому возрастанию b_0 . Но каналы, их соединяющие, при этом разрешении еще не видны, на что указывает невысокое значение первого числа Бетти b_1 по сравнению с этой величиной для модели С. Кроме того, значение Эйлеровой характеристики порового пространства для модели В положительное, в то время как ее взвешенное значение отрицательное, из чего следует, что поровое пространство модели В разрозненное, состоит из небольших компонент связности и имеет малое число "туннелей".

Модель С построена с еще большим разрешением по сравнению с А и В, что проявляется в уменьшении количества разрозненных тел b_0 и увеличении числа "туннелей" b_1 при отрицательных значениях как Эйлеровой, так и её взвешенной характеристики. Следовательно, модель С образца песчаника более связная, с большим количеством "туннелей", т.е. при изменении разрешения с 5.58 на 3.44 мкм на воксель проявляются каналы, соединяющие поры, которые не видны в модели В. Таким образом, модель С характеризуется наибольшей связностью и разветвленностью порового пространства среди рассмотренных.

В модели D при еще большем разрешении отмечается дальнейшее увеличение количества изолированных пор и каналов в поровом пространстве, а Эйлерова

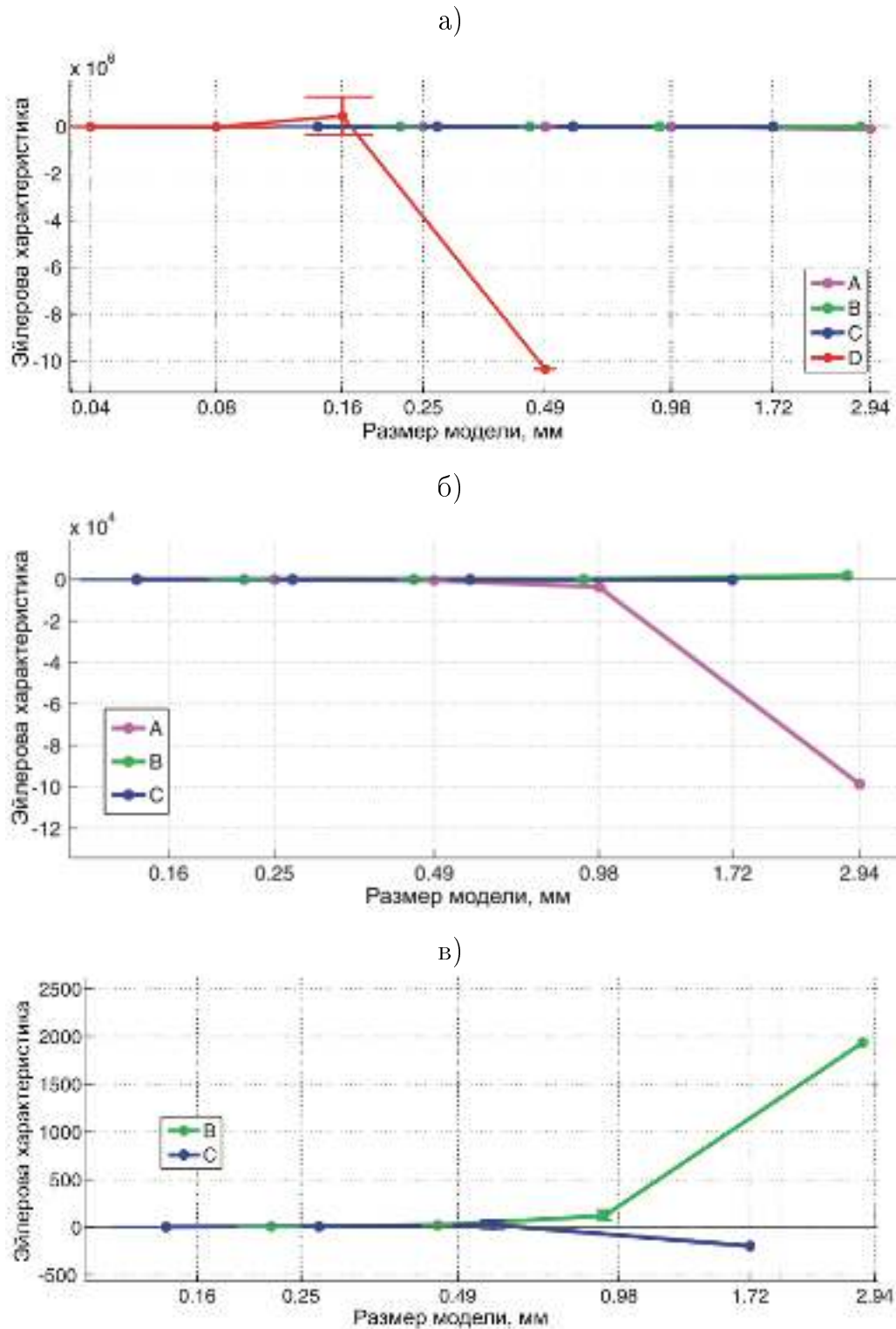


Рисунок 2.17 – Эйлерова характеристика для моделей А, В, С и D (а), А, В и С (б), В и С (в) в зависимости от их линейного размера в миллиметрах (логарифмическая шкала): средние значения и стандартные отклонения от среднего

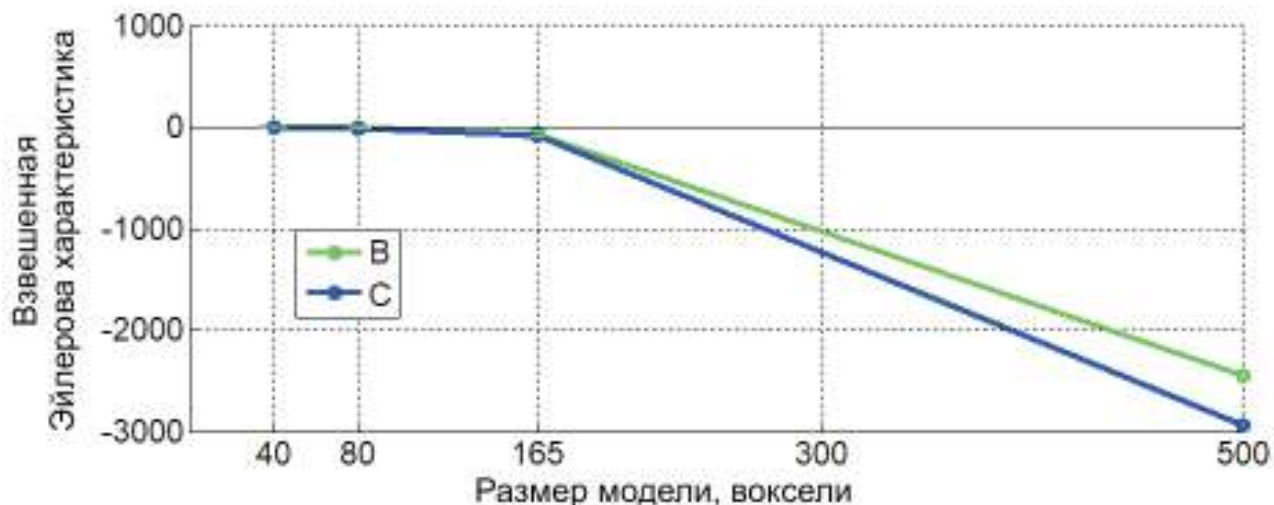


Рисунок 2.18 – Взвешенная Эйлерова характеристика для моделей В и С в зависимости от их линейного размера в вокселях: средние значения и стандартные отклонения от среднего

характеристика остается отрицательной. Т.е. при таком высоком разрешении проявляются микроструктурные элементы, которые не видны в модели С, однако, как показывают предыдущие вычисления, объём модели D (0.49 мм) слишком мал и неrepresentателен для оценки морфологических и транспортных параметров.

На графиках зависимости топологических инвариантов от линейного размера модели (Рисунки 2.15 - 2.18) видно, что они не стабилизируются, в отличие от других морфологических параметров, а увеличиваются с размером модели, при этом b_0 растёт медленнее, в то время как b_1 увеличивается быстрее, чем её линейный размер (Рисунки 2.15, 2.16) [Bazaikin, ..., Khachkova, 2017]. Причем для моделей В и С $b_0 \propto L^{2.75}$, а $b_1 \propto L^{3.2}$, где L - линейный размер образца в вокселях или в миллиметрах. При этом стандартное отклонение чисел Бетти для модели D на выборке максимального размера больше 30%, что подтверждает нерепрезентативность этого объёма, в то время как аналогичные значения для моделей В и С - порядка 10% от среднего значения при линейном размере моделей около 165 вокселей (15 длин корреляции, 0.7—1.0 мм). Отсюда следует, что топологические инварианты цифровой модели образца можно статистически оценить по стандартным томографическим изображениям с разрешением 3—6 мкм на воксель и затем использовать для определения порового пространства, например, при статистическом моделировании образца породы.

Итак, результаты топологического анализа показывают, что модели А и D

не подходят для оценки морфологических и транспортных параметров образца породы в силу недостаточного разрешения в первом случае и нерепрезентативности объёма во втором. И хотя модели В и С обладают репрезентативностью, но при изменении разрешения съёмки с 3.44 на 5.58 мкм на воксель теряется важная информация о микроструктуре пор и соединяющих их каналов, которые обеспечивают проницаемость породы. Следовательно, при использовании модели В появляется существенная погрешность оценки как геометрических (пористости, удельной площади поверхности раздела скелет—поры, средней кривизны этой поверхности), так и физических (проницаемости, извилистости порового пространства) параметров, которая проявляется в разнице между значениями, получаемыми для моделей В и С.

Исследование показывает, что для рассматриваемого образца песчаника обозначения Берсимер оптимальным можно считать разрешение 3.44 мкм на воксель модели С с наибольшей связностью и разветвлённостью порового пространства, в которой, с одной стороны, сохраняется репрезентативность объёма, а с другой стороны, максимально проявляется микроструктура образца и достигается наибольшая точность оценки значений указанных параметров.

Следовательно, топологический анализ цифровых моделей горной породы позволяет определить оптимальное разрешение томографических изображений для более точной оценки необходимых параметров.

2.4 Сопоставление результатов лабораторного измерения и численного расчета параметров образца песчаника

Верификация разработанного алгоритма выполняется сопоставлением рассчитанных значений с данными лабораторных измерений, полученными коллегами из Университета Австралии (Curtin University, Perth, Australia). Ясно, что сравниваются только значения пористости и проницаемости, так как остальные морфологические параметры (длина корреляции, средняя кривизна и удельная площадь поверхности раздела скелет—поры, извилистость порового пространства, топологические параметры) невозможно измерить экспериментально. Для лабораторных измерений используется образец песчаника размером 38,5 мм в диаметре и 70 мм в длину, а для расчетов сканируется рентгеновским микроскопом с разным разре-

шением образец-близнец диаметром 5 мм и длиной 14 мм.

Пористость образца песчаника, измеренная автоматизированной установкой для определения пористости и проницаемости AP-608 (Coretest Inc.), составляет 21.5%. Сопоставление с расчётным значением 22% для модели С оптимального разрешения показывает, что относительная разность измеренного и рассчитанного значений составляет 2%, т.е. степень достоверности расчётного значения очень высокая.

Лабораторными измерениями проницаемости, выполненными на той же установке при разности давления флюида на входе и выходе из образца 1 МПа при разных скоростях впрыска, получено значение проницаемости 2.25 Д. Расчётное значение проницаемости для модели С - 2.55 Д, причём, как показывают расчеты, объём 500³ недостаточен для точного определения этого параметра. Из сопоставления следует, что погрешность между измеренным и расчётным значением составляет порядка 10%, а при большем размере томографического изображения значение должно быть значительно точнее.

Сопоставление расчётных значений для модели С с измеренными подтверждает оптимальность выбора разрешения томографической съёмки, поскольку значения, рассчитанные для модели В (пористость - 19%, проницаемость - 3.2 Д), значительно менее точные.

Полученные результаты, их преимущества и значимость

В результате исследований разработан алгоритм численной оценки морфологических и транспортных параметров горной породы по томографическим изображениям образца песчаника, включающий определения не только значения репрезентативного объёма цифрового образца для каждого параметра, но и величины оптимального разрешения томографических изображений, что выгодно отличает его от известных подходов.

На примере изображений образца песчаника обнажения Берсимер (Австралия) показано различие репрезентативных объёмов для оценки разных групп параметров, определено влияние масштаба (разрешения и размера) томографического изображения на оценку морфологических, транспортных характеристик и параметров макроскоростной эффективной модели пороупругой среды. Вычисление показывает, что погрешность порядка 20% в определении параметров образца, связанная с разным разрешением томографической съёмки, приводит в макроскоростной модели к погрешности в скорости сейсмических волн всех типов порядка 10% во всем диапазоне изменения частоты, из чего следует необходимость установления оптимального разрешения томографических изображений.

Многими исследователями отмечается различие между полученными значениями, связанное с разрешением изображений, но оптимальное его значение не определяется. Предложенный способ установления оптимального разрешения основан на анализе топологических инвариантов и позволяет делать этот выбор с высокой степенью достоверности, что подтверждается сопоставлением с результатами лабораторных измерений.

Разработанный алгоритм оценки морфологических и транспортных параметров горной породы позволяет получать информацию по цифровым изображениям образца оптимального разрешения, что значительно повышает степень достоверности оценки указанных параметров.

Однако, как показывает вычисление, для корректной оценки транспортных параметров необходимы томографические изображения образца породы достаточно большого размера.

Глава 3

Алгоритм оценки эффективных упругих параметров горной породы по её цифровым изображениям

3.1 Постановка задачи

При разработке алгоритма численной оценки эффективных (усреднённых) упругих параметров, а именно эффективных тензоров жёсткости и податливости, рассматриваются два типа горной породы:

1. Цементированная порода (например, песчаник), в которой наличие между зёрнами более мягкого материала (цемента) оказывает существенное влияние на упругие параметры.

2. Консолидированная порода, которая либо не содержит цементирующий материал, либо его содержание незначительно (например, известняк), и это не оказывает существенного влияния на упругие параметры.

Входные данные алгоритма - цифровая бинарная модель образца горной породы, полученная в результате обработки его томографических изображений репрезентативного объёма. Если порода цементированна, то чтобы учесть при оценке упругих параметров влияние цементирующего материала, заполняющего межзерновые контакты, не проявляющиеся в масштабе томографических изображений, используются также изображения его поверхности, полученные сканирующим электронным микроскопом (SEM-изображения).

Задача этой части исследования - разработать алгоритм численной оценки эффективных упругих параметров горной породы на основе принципа эквивалентности энергий деформации, в котором статическая задача теории упругости решается итерационным методом установления решения динамической задачи [Решетова, Хачкова, 2017], и двухмасштабный вариант этого алгоритма для геостатистической оценки эффективных упругих параметров цементированной породы, в котором для учёта влияния цементирующего материала используются SEM-

изображения её поверхности [Хачкова и др., 2017; 2018].

3.2 Алгоритм оценки эффективных упругих параметров по цифровой модели породы на основе принципа эквивалентности энергий деформации

3.2.1 Теоретическое обоснование применения принципа эквивалентности энергий деформации неоднородного и однородного упругих тел

Эффективные упругие параметры образца породы определяются в рамках обобщенного закона Гука о связи между усредненными по представительному объёму значениями тензоров напряжения и деформации:

$$\bar{\sigma}_{ij} = c_{ijkl}^* \bar{\varepsilon}_{kl} \quad (3.1)$$

или

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = s_{ijkl}^* \bar{\sigma}_{kl}, \quad (3.2)$$

где c_{ijkl}^* и s_{ijkl}^* - тензоры четвертого ранга, которые, по определению, и являются эффективными тензорами жёсткости C^* и податливости S^* , а усредненные значения тензоров напряжения и деформации определяются по формулам:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV, \quad (3.3)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV, \quad (3.4)$$

где σ_{ij} и ε_{ij} - значения компонент тензоров напряжения и деформации в представительном объёме V неоднородного образца, изменяющиеся от точки к точке.

Если рассмотреть некоторый однородный образец такого же объёма V с постоянными во всех точках значениями тензоров напряжения σ_{ij} и деформации

ε_{ij} , равными соответственно $\bar{\sigma}_{ij}$ и $\bar{\varepsilon}_{ij}$, то он будет *эквивалентным* в этом смысле неоднородному, поскольку эффективные тензоры жесткости C^* и податливости S^* этих двух образцов совпадают.

Для нахождения эффективных упругих параметров используется принцип эквивалентности энергий деформации неоднородного и эквивалентного ему однородного образца [Zhang et al., 2007]. При этом вводится понятие *однородных* граничных условий [Aboudi, 1991]. Они могут быть как кинематическими, так и статическими и определяются таким образом, что, будучи приложенными к границе S однородного упругого тела с объёмом V , вызывают в нем однородные (постоянные) напряжение и деформацию. В частности, однородными кинематическими являются граничные условия с заданным на границе вектором смещения в виде линейной функции

$$u_i(S) = \varepsilon_{ij}^0 x_j, \quad (3.5)$$

а однородными статическими будут граничные условия с заданным на границе постоянным напряжением

$$t_i(S) = \sigma_{ij}^0 n_j, \quad (3.6)$$

где $\sigma_{ij}^0, \varepsilon_{ij}^0$ - некоторые постоянные симметричные тензоры напряжения и деформации, \vec{n} - вектор внешней нормали к границе S , а x_j - пространственная координата.

В основе принципа эквивалентности энергий деформации лежит теорема, которая играет ключевую роль в обосновании его использования для вычисления эффективных упругих параметров неоднородного тела [Aboudi, 1991]:

Теорема 1. *Однородные статические граничные условия (3.6), заданные на границе S неоднородного упругого тела представительного объёма V , определяют в нем такой тензор напряжения σ_{ij} , усреднённое по объёму значение (3.3) которого равно значению постоянного тензора напряжения σ_{ij}^0 ,*

контролирующего условия (3.6):

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^0. \quad (3.7)$$

В случае же однородных кинематических граничных условий (3.5), заданных на границе неоднородного упругого тела, справедливо аналогичное утверждение для усреднённого по объёму значения тензора деформации $\bar{\varepsilon}_{ij}$ и постоянного ε_{ij}^0 , определяющего граничные условия (3.5):

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^0. \quad (3.8)$$

Поскольку потенциальная энергия деформации, возникающая в неоднородном упругом деформируемом теле объёмом V , определяется по формуле:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV, \quad (3.9)$$

то при однородных статических граничных условиях она вычисляется следующим образом:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} u_i n_j dS = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^0 \int_S u_i n_j dS = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^0 \int_V u_{i,j} dV = \quad (3.10)$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_{ij}^0 \int_V \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} V = \frac{1}{2} s_{ijkl}^* \sigma_{kl}^0 \sigma_{ij}^0 V.$$

То есть потенциальная энергия неоднородного упругого тела в напряжённо-деформированном состоянии определяется по формуле:

$$U = \frac{1}{2} s_{ijkl}^* \sigma_{kl}^0 \sigma_{ij}^0 V. \quad (3.11)$$

Таким образом, если известно значение потенциальной энергии U напряжённно-деформированного неоднородного упругого тела при заданных однородных граничных условиях с параметром σ_{ij}^0 , то для нахождения компонент эффективного тензора податливости s_{ijkl}^* используется уравнение (3.11).

Если те же однородные граничные условия задать на границе однородного упругого тела, эквивалентного неоднородному, и вычислить потенциальную энергию деформации U_0 , возникающую в нём, то полученное выражение будет аналогичным (3.11):

$$U_0 = \frac{1}{2} s_{ijkl}^* \sigma_{kl}^0 \sigma_{ij}^0 V. \quad (3.12)$$

Таким образом, в основе принципа эквивалентности энергий деформации лежит равенство потенциальных энергий деформации для неоднородного тела и эквивалентного ему однородного:

$$U_0 = U. \quad (3.13)$$

Если для решения статической задачи теории упругости выбираются однородные кинематические граничные условия (3.5) в виде вектора смещения, то определяются компоненты тензора жёсткости. При однородных же статических граничных условиях (3.6), когда на границе задаётся напряжение, определяются компоненты тензора податливости, и уже по ним восстанавливается тензор жёсткости.

В первом случае при заданном векторе смещения решается система уравнений Ламе, что даёт распределение смещения. Тогда значение потенциальной энергии вычисляется по формуле:

$$U(u) = \frac{1}{2} \int_V [\lambda(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3})^2 + 2\mu(u_{1,1}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,3}^2) + \\ + \mu\{(u_{1,2} + u_{2,1})^2 + (u_{2,3} + u_{3,2})^2 + (u_{3,1} + u_{1,3})^2\}] dV, \quad (3.14)$$

и для её нахождения необходимо дифференцирование функций, заданных в узлах разностной сетки. Однако численное дифференцирование совместно с интегрированием по объёму вносит дополнительные погрешности, и чем грубее сетка (разрешение цифровых трёхмерных изображений), тем больше эта погрешность.

Во втором случае, когда на границе задаётся напряжение и потенциальная энергия вычисляется по найденному значению напряжения по формуле:

$$U(\sigma) = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - 2\nu(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) + \\ + 2(1 + \nu)(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) dV, \quad (3.15)$$

тогда отпадает необходимость численного дифференцирования, следовательно, повышается точность результатов. Кроме того, несомненное преимущество использования статических граничных условий заключается в том, что таким образом численно моделируется воздействие на образец горной породы при лабораторном нагружении прессом с широким спектром нагрузок на этот образец при прецизионно измеряемой деформации. Поэтому статическая задача теории упругости решается с заданными на границе однородными статическими граничными условиями [Reshetova, Khachkova, 2017].

3.2.2 Вычисление компонент тензора податливости по потенциальной энергии деформации породы

Компоненты тензора податливости S^* вычисляются по потенциальной энергии деформации U образца горной породы, рассчитанной при заданном статическом напряжении [Reshetova, Khachkova, 2018]. Сначала рассматривается **двумерный случай**, когда тензор податливости S^* представлен в виде симметричной матрицы 3×3

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = S^* \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad S^* = \begin{pmatrix} s_{1111}^* & s_{1122}^* & s_{1112}^* \\ & s_{2222}^* & s_{2212}^* \\ sym & & s_{1212}^* \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

для прямоугольного образца породы со сторонами a и b , параллельными осям координат (Рисунок 3.1). При этом по комбинациям последовательно заданных одно-

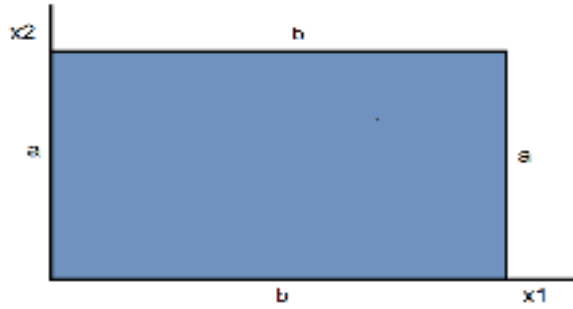


Рисунок 3.1 – Схематичное двумерное представление образца горной породы для вычисления компонент тензора податливости

родных граничных условий находятся разные компоненты тензора податливости s_{ijkl}^* для шести разных случаев.

Случай 1. Для вычисления компоненты тензора податливости s_{1111}^* решается краевая статическая задача теории упругости

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (3.17)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} = c_{ijkl} u_{k,l}; \quad i, j = 1, 2 \quad (3.18)$$

с заданными статическими граничными условиями:

$$\sigma_{11}|_a = 1, \quad \sigma_{22}|_b = 0, \quad \sigma_{12}|_{a,b} = 0. \quad (3.19)$$

Для условий (3.19) выражение потенциальной энергии деформации в неоднородном образце (3.11) преобразуется к виду:

$$U^{(1)} = \frac{1}{2} s_{1111}^* V. \quad (3.20)$$

Здесь и далее верхний индекс в обозначениях указывает на порядковый номер рассматриваемого случая. После нахождения потенциальной энергии деформации $U^{(1)}$ компонента тензора вычисляется по формуле:

$$s_{1111}^* = \frac{2U^{(1)}}{V}. \quad (3.21)$$

Случай 2. Компонента тензора податливости s_{2222}^* рассчитывается решением уравнений (3.17) - (3.18) с граничными условиями вида:

$$\sigma_{22}|_b = 1, \quad \sigma_{11}|_a = 0, \quad \sigma_{12}|_{a,b} = 0. \quad (3.22)$$

Выражение для потенциальной энергии деформации (3.11) с учетом новых граничных условий (3.22) преобразуется к виду:

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} s_{2222}^* V. \quad (3.23)$$

Поэтому после нахождения потенциальной энергии деформации $U^{(2)}$ нужная компонента тензора податливости вычисляется по формуле:

$$s_{2222}^* = \frac{2U^{(2)}}{V}. \quad (3.24)$$

Случай 3. Чтобы вычислить компоненту тензора податливости s_{1212}^* , задача (3.17) - (3.18) решается с граничными условиями:

$$\sigma_{11}|_a = \sigma_{22}|_b = 0, \quad \sigma_{12}|_{a,b} = 1. \quad (3.25)$$

В этом случае потенциальная энергия деформации $U^{(3)}$ выражается формулой:

$$U^{(3)} = \frac{1}{2} s_{1212}^* V, \quad (3.26)$$

отсюда,

$$s_{1212}^* = \frac{2U^{(3)}}{V}. \quad (3.27)$$

Для вычисления оставшихся компонент s_{1122}^* , s_{1112}^* , s_{2212}^* используется свойство линейности уравнений и граничных условий статической задачи теории упругости.

Случай 4. Для расчёта компоненты тензора податливости s_{1122}^* сначала вычисляется потенциальная энергия деформации $U^{(4)}$ неоднородного образца породы со следующими заданными граничными условиями:

$$\sigma_{11}|_a = 1, \quad \sigma_{22}|_b = 1, \quad \sigma_{12}|_{a,b} = 0. \quad (3.28)$$

Очевидно, что они являются линейной комбинацией граничных условий (3.19), (3.22). Поэтому для нахождения потенциальной энергии деформации $U^{(4)}$ образца используются результаты предыдущих вычислений:

$$U^{(4)} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{(4)} \varepsilon_{ij}^{(4)} dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) dV = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(1,2)}, \quad (3.29)$$

где

$$\begin{aligned} U^{(1,2)} &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)}) dV = \\ &= \int_V \left[\frac{1}{E} (\sigma_{11}^{(1)} \sigma_{11}^{(2)} + \sigma_{22}^{(1)} \sigma_{22}^{(2)}) - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11}^{(1)} \sigma_{22}^{(2)} + \sigma_{11}^{(2)} \sigma_{22}^{(1)}) + \frac{2(\nu + 1)}{E} \sigma_{12}^{(1)} \sigma_{12}^{(2)} \right] dV, \end{aligned} \quad (3.30)$$

а $U^{(1)}$, $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ и $U^{(2)}$, $\sigma_{ij}^{(2)}$, $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ - рассчитанные значения потенциальной энергии и

тензоров напряжения и деформации для случаев 1 и 2. Тогда компонента тензора податливости s_{1122}^* вычисляется по формуле:

$$s_{1122}^* = \frac{U^{(1,2)}}{V}. \quad (3.31)$$

Итак, линейность уравнений и граничных условий статической задачи теории упругости позволяет и здесь, и далее обойтись без численного решения задачи (3.17) - (3.18) с граничными условиями (3.28) и таким образом сократить время расчетов. Однако возникает необходимость хранения вычисленных значений тензоров напряжения и деформации, а также потенциальной энергии деформации для предыдущих трёх случаев.

Случай 5. Компонента тензора податливости s_{2212}^* вычисляется по потенциальной энергии деформации $U^{(5)}$ неоднородного образца породы с заданными на границе статическими условиями:

$$\sigma_{11}|_a = 0, \quad \sigma_{22}|_b = 1, \quad \sigma_{12}|_{a,b} = 1. \quad (3.32)$$

Они представляют собой комбинацию граничных условий (3.22), (3.25), поэтому потенциальную энергию деформации $U^{(5)}$ можно представить в виде суммы:

$$U^{(5)} = U^{(2)} + U^{(3)} + U^{(2,3)}, \quad \text{где} \quad U^{(2,3)} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(3)} + \sigma_{ij}^{(3)} \varepsilon_{ij}^{(2)}) dV, \quad (3.33)$$

при этом компонента тензора податливости s_{2212}^* рассчитывается по формуле:

$$s_{2212}^* = \frac{U^{(2,3)}}{V}. \quad (3.34)$$

Случай 6. Для вычисления компоненты тензора податливости s_{1112}^* образца породы задаются статические граничные условия:

$$\sigma_{11}|_a = 1, \quad \sigma_{22}|_b = 0, \quad \sigma_{12}|_{a,b} = 1. \quad (3.35)$$

Поскольку они являются комбинацией условий (3.19), (3.25), то потенциальная энергия деформации $U^{(6)}$ есть сумма энергий:

$$U^{(6)} = U^{(1)} + U^{(3)} + U^{(1,3)}, \quad \text{где} \quad U^{(1,3)} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(3)} + \sigma_{ij}^{(3)} \varepsilon_{ij}^{(1)}) dV. \quad (3.36)$$

В этом случае компонента тензора податливости s_{1112}^* вычисляется по формуле:

$$s_{1112}^* = \frac{U^{(1,3)}}{V}. \quad (3.37)$$

В **трехмерном случае** тензор податливости S^* рассматривается в виде симметричной матрицы 6×6 [Reshetova, Khachkova, 2018]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = S^* \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad S^* = \begin{pmatrix} s_{1111}^* & s_{1112}^* & s_{1113}^* & s_{1123}^* & s_{1113}^* & s_{1112}^* \\ & s_{2222}^* & s_{2233}^* & s_{2223}^* & s_{2213}^* & s_{2212}^* \\ & & s_{3333}^* & s_{3323}^* & s_{3313}^* & s_{3312}^* \\ & & & s_{2323}^* & s_{2313}^* & s_{2312}^* \\ & & & & s_{1313}^* & s_{1312}^* \\ & & & & & s_{1212}^* \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

для прямоугольного параллелепипеда объемом V с рёбрами, параллельными осям координат (Рисунок 3.2). При этом соответствующим символом обозначается как передняя, так и параллельная ей задняя грань параллелепипеда. Как и в двумерном случае, для вычисления компонент тензора податливости s_{ijkl}^* последовательно задаются однородные статические граничные условия (Таблица 3.1), решается статическая задача теории упругости и рассчитывается значение потенциальной энергии деформации образца породы в каждом случае, после чего вычисляется соответствующий диагональный компонент тензора податливости.

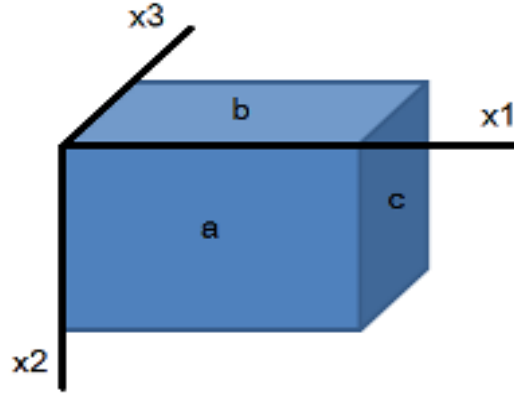


Рисунок 3.2 – Схематичное представление трёхмерного образца горной породы для определения компонент тензора податливости

Таблица 3.1 – Однородные статические граничные условия и формулы для вычисления диагональных компонент тензора податливости s_{ijkl}^*

Плоскость а	Плоскость b	Плоскость с	Значение s_{ijkl}^*
$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{11} = 1, \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$	$s_{1111}^* = 2U^{(1)}/V$
$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{22} = 1, \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$	$s_{2222}^* = 2U^{(2)}/V$
$\sigma_{33} = 1, \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$	$s_{3333}^* = 2U^{(3)}/V$
$\sigma_{23} = 1, \sigma_{33} = \sigma_{13} = 0$	$\sigma_{23} = 1, \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$	$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$	$s_{2323}^* = 2U^{(4)}/V$
$\sigma_{13} = 1, \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{13} = 1, \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$	$s_{1313}^* = 2U^{(5)}/V$
$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{12} = 1, \sigma_{22} = \sigma_{23} = 0$	$\sigma_{12} = 1, \sigma_{11} = \sigma_{13} = 0$	$s_{1212}^* = 2U^{(6)}/V$

Для вычисления оставшихся наддиагональных компонент тензора податливости s_{ijkl}^* , аналогично двумерному случаю, используются свойство линейности уравнений и граничных условий статической задачи теории упругости и результаты выполненных расчётов для первых шести случаев (Таблица 3.2), при этом

Таблица 3.2 – Формулы для вычисления наддиагональных компонент тензора податливости s_{ijkl}^*

$s_{1122}^* = U^{(1,2)}/V$	$s_{1123}^* = U^{(1,4)}/V$	$s_{1113}^* = U^{(1,5)}/V$	$s_{2313}^* = U^{(4,5)}/V$	$s_{3312}^* = U^{(3,6)}/V$
$s_{1133}^* = U^{(1,3)}/V$	$s_{2223}^* = U^{(2,4)}/V$	$s_{2213}^* = U^{(2,5)}/V$	$s_{1112}^* = U^{(1,6)}/V$	$s_{2312}^* = U^{(4,6)}/V$
$s_{2233}^* = U^{(2,3)}/V$	$s_{3323}^* = U^{(3,4)}/V$	$s_{3313}^* = U^{(3,5)}/V$	$s_{2212}^* = U^{(2,6)}/V$	$s_{1312}^* = U^{(5,6)}/V$

значение потенциальной энергии деформации $U^{(k,l)}$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}
U^{(k,l)} &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(l)} + \sigma_{ij}^{(l)} \varepsilon_{ij}^{(k)}) dV = \\
&= \int_V \frac{1}{E} (\sigma_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(l)} + \sigma_{22}^{(k)} \sigma_{22}^{(l)} + \sigma_{33}^{(k)} \sigma_{33}^{(l)}) dV - \\
&- \int_V \frac{\nu}{E} (\sigma_{11}^{(k)} \sigma_{22}^{(l)} + \sigma_{11}^{(l)} \sigma_{22}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} \sigma_{33}^{(l)} + \sigma_{22}^{(l)} \sigma_{33}^{(k)} + \sigma_{11}^{(k)} \sigma_{33}^{(l)} + \sigma_{11}^{(l)} \sigma_{33}^{(k)}) dV + \\
&+ \int_V \frac{2(\nu+1)}{E} (\sigma_{12}^{(k)} \sigma_{12}^{(l)} + \sigma_{23}^{(k)} \sigma_{23}^{(l)} + \sigma_{13}^{(k)} \sigma_{13}^{(l)}) dV.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

3.2.3 Решение статической задачи теории упругости итерационным методом установления решения динамической задачи теории упругости

Наиболее трудоёмкая в вычислительном плане составляющая алгоритма вычисления эффективных упругих параметров - это решение серии статических задач теории упругости с заданными на границе внешними напряжениями для определения потенциальной энергии деформации образца породы. В конечном счёте эти задачи сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений. Прямые методы, обладая рядом преимуществ, к сожалению, не подходят для решения рассматриваемых трёхмерных задач из-за чрезмерных вычислительных затрат. Поэтому для определения эффективных упругих параметров используется итерационный метод [Reshetova, Khachkova, 2018].

Итак, решается статическая задача теории упругости для образца объёмом V с границей S , которая включает уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \tag{3.40}$$

закон Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C_{ijkl} u_{k,l} \tag{3.41}$$

и однородные статические граничные условия

$$t_i(S) = \sigma_{ij}^0 n_j. \quad (3.42)$$

Решение задачи (3.40) - (3.42) сводится к поиску установившегося решения динамической задачи теории упругости в постановке напряжение/скорость смещения с добавлением в уравнение движения диссипативного члена α :

$$\rho \dot{v}_i + \alpha v_i = \sigma_{ij,j} \quad (3.43)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} = C_{ijkl} v_{k,l} \quad (3.44)$$

с нулевыми начальными условиями при $t = 0$:

$$v_i = 0, \quad \sigma_{ij} = 0 \quad (3.45)$$

и постоянными по времени граничными условиями:

$$t_i(S) = \sigma_{ij}^0 n_j, \quad (3.46)$$

где $v_i = \dot{u}_i$, v_i - скорость смещения, u_i - вектор смещения, а ρ - плотность.

Сходимость итерационного процесса решения задачи (3.43) - (3.46) к решению статической задачи (3.40) - (3.42) доказывается теоремой о вириале, сформулированной в 1870 году Рудольфом Клаузиусом (R.Clausius) для механической системы, движение в которой происходит в ограниченной области пространства с ограниченной по модулю скоростью [цит. по: Ольховский, 1978].

Теорема 2. *Усреднённая по бесконечному интервалу времени кинетическая энергия T механической системы равна усреднённому по тому же интервалу времени вириалу сил*

$$\overline{T} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \overline{F_i r_i}, \quad (3.47)$$

где N - число материальных точек системы, \vec{F}_i - сила, действующая на i -ю точку системы и \vec{r}_i - радиус-вектор этой точки.

Если потенциальная энергия U является однородной функцией первой степени относительно координат точки, то верно соотношение между средними значениями кинетической и потенциальной энергий системы

$$2\bar{T} = -\bar{U}. \quad (3.48)$$

Отсюда следует, что если уменьшать кинетическую энергию T системы через искусственно введенный в уравнения движения диссипативный член α механизма затухания, то жесткая связь между кинетической и потенциальной энергиями приводит к уменьшению потенциальной энергии до её минимума. Далее используется принцип Лагранжа-Дирихле для статически нагруженного тела: "Из всех возможных напряженно-деформированных состояний деформируемого твердого тела действительному напряженному состоянию соответствует минимум полной энергии деформации" [цит. по: Работнов, 1979]. Следовательно, итерационный процесс решения динамической задачи (3.43) - (3.46) сходится к решению статической (3.40) - (3.42).

Для численного решения начально-краевой задачи (3.43) - (3.46) используется конечно-разностная схема на сдвинутых сетках Вирьё [Virieux, 1986], модифицированная для обеспечения аппроксимации в неоднородных средах [Vishnevsky et al., 2014].

Сходимость решения динамической задачи (3.43) - (3.44) с нулевыми начальными условиями и граничными условиями (3.19) к решению статической (3.17) - (3.18) с граничными условиями (3.19) показывается на примере ограниченной области однородной двумерной среды. Статическая задача имеет точное решение: $\sigma_{11}(x, y) = 1$, $\varepsilon_{11}(x, y) = 1/(\lambda + 2\mu)$, $u_1(x, y) = x/(\lambda + 2\mu)$, а все остальные компоненты вектора смещения, тензоров напряжения и деформации равны нулю. Рассматривается итерационный процесс решения краевой динамической задачи.

Пусть в начальный момент времени коэффициент диссипации α равен нулю, а приложенное на границе напряжение $\sigma_{11}|_a = 1$ возбуждает волновое поле, которое распространяется внутрь области, как видно на моментальных снимках компоненты σ_{11} , сделанных с интервалом 100 временных шагов Δt , используе-

мых в разностной схеме (Рисунок 3.3). После того как волновое поле заполнит всю расчётную область, т.е. через двойное время T_0 пробега волны от источника возбуждения до самой удалённой точки расчётной области, запускается механизм затухания, контролируемый параметром $\alpha > 0$ для диссипации волновой составляющей решения и обеспечения его сходимости к точному решению статической задачи (Рисунок 3.4).

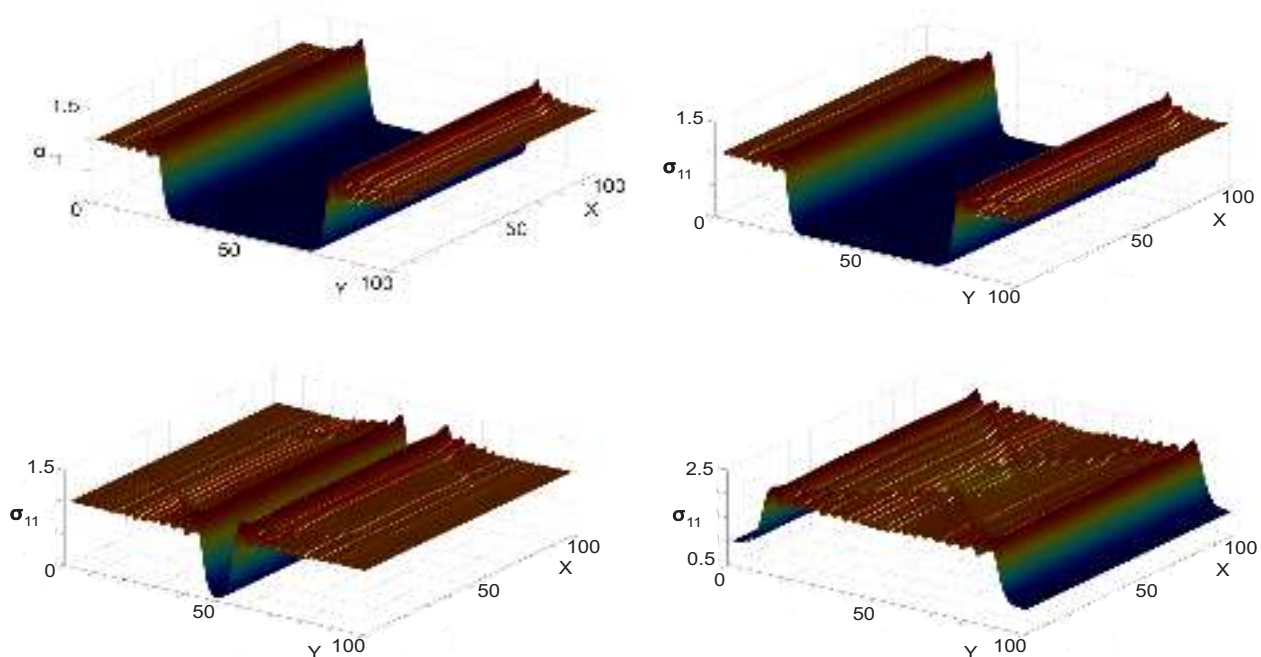


Рисунок 3.3 – Моментальные снимки волнового поля для компоненты тензора напряжения σ_{11} с интервалом в 100 шагов разностной схемы по времени (слева направо и сверху вниз), диссипативный член $\alpha = 0$

В качестве критерия остановки итерационного процесса в решении динамической задачи (3.43) - (3.46) выбирается малость относительного изменения приближенного решения на двух последующих шагах:

$$\left\| \frac{\sigma_{ij}^{(k)} - \sigma_{ij}^{(k-1)}}{\sigma_{ij}^{(k)}} \right\| \leq \varepsilon, \quad (3.49)$$

где ε - заданное малое значение точности нахождения решения.

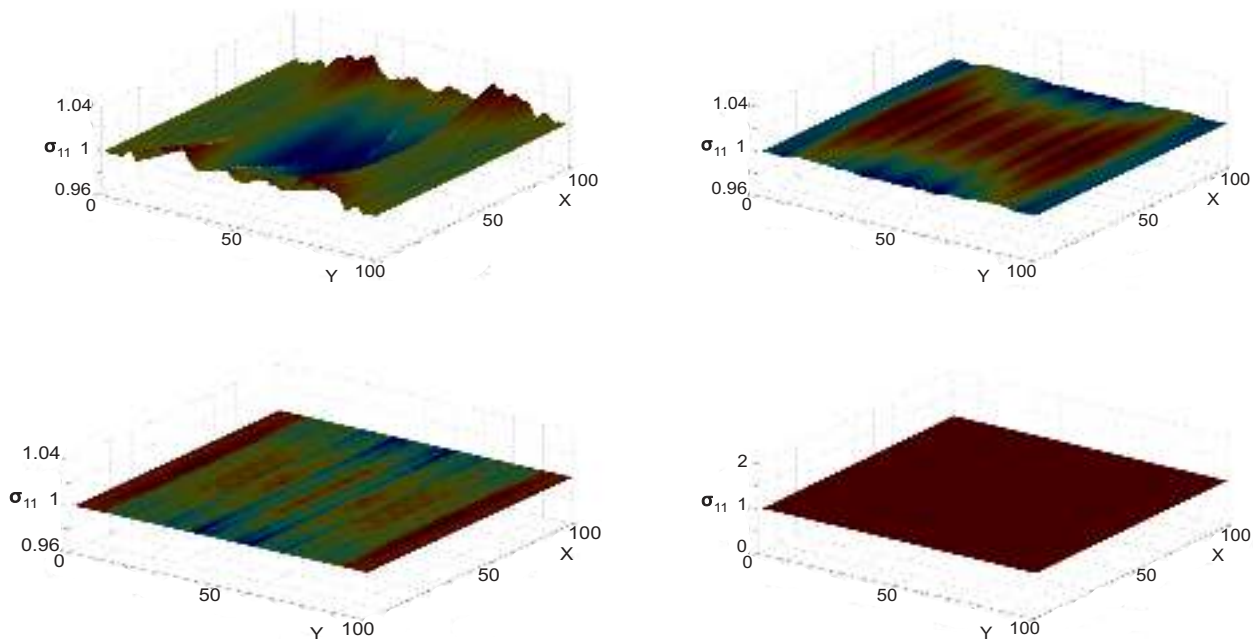


Рисунок 3.4 – Моментальные снимки волнового поля для компоненты σ_{11} с интервалом в 100 шагов разностной схемы по времени (слева направо и сверху вниз) после включения диссипативного члена

Численное исследование показывает, что при коэффициенте диссипации

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & t < T_0 \\ 0.001, & t > T_0, \end{cases} \quad (3.50)$$

и точности решения $\varepsilon = 10^{-6}$ итерационный процесс решения краевой динамической задачи сходится к указанному точному решению статической за 400 шагов разностной схемы [Reshetova, Khachkova, 2017].

3.2.4 Верификация алгоритма оценки эффективных упругих параметров породы численными экспериментами

Оценка упругих параметров однородной изотропной породы

В случае однородной изотропной породы вычисленный разработанным алгоритмом эффективный тензор жёсткости должен совпадать с её точным тензором жёсткости, рассчитываемым через параметры Ламе материала. Расчеты выполняются для моделей кварца, кальцита и глины размером $N \times N$ в двумерном случае

и $N \times N \times N$ – в трёхмерном (в обоих случаях $N = 200$) с заданными упругими параметрами (Таблица 3.3). В качестве критерия останковки (3.49) итерационного процесса решения задачи используется значение параметра $\varepsilon = 10^{-6}$.

Таблица 3.3 – Используемые при расчетах упругие параметры материала.

Материал	Плотность, кг/м ³	Скорости упругих волн, м/с		Параметры Ламе, Па	
	ρ	V_p	V_s	λ	μ
Кварц	2650	6000	4075	7390187500	44004906250
Кальцит	2700	5600	2620	47604240000	18533880000
Глина	2600	2770	1520	7935460000	6007040000

В однородной изотропной упругой среде тензор жёсткости имеет вид [цит. по: Козлов, 2006]:

– в двумерном случае

$$C^* = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

– в трёхмерном случае

$$C^* = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

поэтому точное значение этого тензора несложно вычислить по заданным параметрам Ламе. Сопоставление известных и рассчитанных с использованием разра-

ботанного алгоритма значений тензора жёсткости на примере таких пород, как кварц, кальцит и глина, показывает высокую точность вычисления эффективных упругих параметров как в двумерном (Таблица 3.4), так и в трёхмерном случае (Таблица 3.5).

Таблица 3.4 – Значения точного и вычисленного эффективного тензора жёсткости однородной изотропной породы в двумерном случае

Материал	Точные значения	Вычисленные значения
Кварц	$\lambda + 2\mu = c_{1111}^* = c_{2222}^* = 95400000000$ $\mu = c_{1212}^* = 44004906250$ $\lambda = c_{1122}^* = 7390187500$ $c_{1112}^* = c_{2212}^* = 0$	$c_{1111}^* = c_{2222}^* = 95400000164.49$ $c_{1212}^* = 44004906351.97$ $c_{1122}^* = 7390187557.59$ $c_{1112}^* = c_{2212}^* = 0$

В двумерном случае расчётное время составляет 2 мин. на персональном компьютере с 8-ядерным процессором. В трёхмерном случае расчёты выполняются на кластере ССКЦ СО РАН, для расчета используется 6 узлов Intel Xeon X5670, и для определения эффективного тензора жёсткости требуется 45 мин. [Reshetova, Khachkova, 2017].

Таблица 3.5 – Значения точного и вычисленного эффективного тензора жёсткости однородной изотропной породы в трёхмерном случае

Материал	Точные значения	Вычисленные значения
Кальцит	$c_{1111}^* = c_{2222}^* = c_{3333}^* = 84672000000$ $\mu = c_{2323}^* = c_{1313}^* = c_{1212}^* = 18533880000$ $\lambda = c_{1122}^* = c_{1133}^* = c_{2233}^* = 47604240000$ Остальные $c_{ijkl}^* = 0$	$c_{1111}^* = c_{2222}^* = c_{3333}^* = 84671999914.2$ $c_{2323}^* = c_{1313}^* = c_{1212}^* = 18533879937.46$ $c_{1122}^* = c_{1133}^* = c_{2233}^* = 47604239998.42$ Остальные $c_{ijkl}^* \approx 10^{-1}$
Глина	$c_{1111}^* = c_{2222}^* = c_{3333}^* = 19949540000$ $\mu = c_{2323}^* = c_{1313}^* = c_{1212}^* = 6007040000$ $\lambda = c_{1122}^* = c_{1133}^* = c_{2233}^* = 7935460000$ Остальные $c_{ijkl}^* = 0$	$c_{1111}^* = c_{2222}^* = c_{3333}^* = 19949540029.98$ $c_{2323}^* = c_{1313}^* = c_{1212}^* = 6007039995.43$ $c_{1122}^* = c_{1133}^* = c_{2233}^* = 7935460017.49$ Остальные $c_{ijkl}^* \approx 10^{-1}$

Оценка эффективных упругих параметров слоистой горной породы

Тестовые расчёты выполняются на двумерных и трёхмерных моделях породы разных размеров с одним или несколькими горизонтальными плоскими одно-

родными изотропными прослоями с упругими характеристиками, отличающимися от этих параметров однородной изотропной вмещающей среды. Рассчитанные разработанным алгоритмом эффективные упругие параметры сопоставляются с рассчитанными методом осреднения Шёнберга для системы тонких параллельных слоёв бесконечного простирания [Schoenberg et al., 1989]. Относительная разность полученных значений эффективного тензора жёсткости вычисляется по Фробениусовой норме, и исследуется её изменение при увеличении размера модели и количества прослоев [Reshetova, Khachkova, 2017].

В двумерном случае рассматривается модель породы в виде прямоугольника размером $N_x \times N_z$, заполненная однородным материалом с упругими параметрами $V_p = 6000$ м/с, $V_s = 4075$ м/с, $\rho = 2650$ кг/м³ с прослоем (или несколькими прослоями) более мягкого материала мощностью L_z с параметрами $V_p = 2770$ м/с, $V_s = 1520$ м/с и $\rho = 2600$ кг/м³ (Рисунок 3.5).

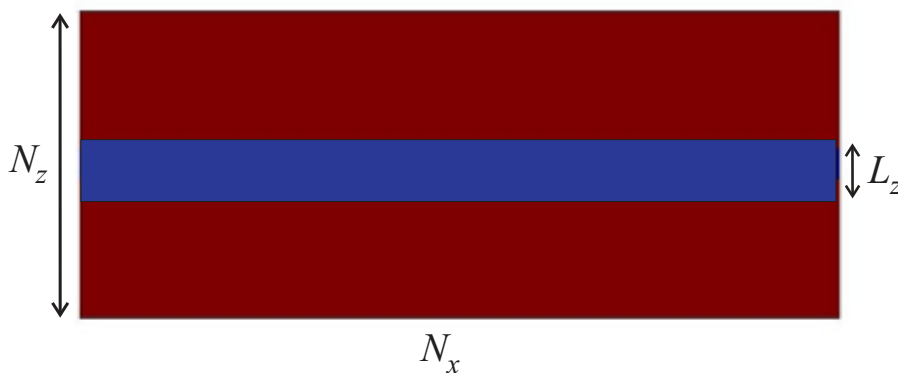


Рисунок 3.5 – Двумерная модель породы с горизонтальным плоским прослоем

В первой серии расчётов размер модели увеличивается по горизонтали

$$N_x = 30, 40, 50, 75, 100, 150, 200, 300, 400, 500, 600$$

при фиксированном поперечном размере $N_z = 30$ и мощности прослоя $L_z = 6$.

На графике зависимости относительной разности значений эффективного тензора жёсткости от горизонтального размера модели (Рисунок 3.6) видно, что с его увеличением относительная разность с результатом, полученным методом осреднения Шёнберга, уменьшается и при размере модели 600×30 становится менее 3%, т.е. рассчитанный результат при увеличении горизонтального размера модели приближается к эффективным упругим параметрам тонкослоистой среды бесконечного простирания.

Во второй серии расчётов для двумерного случая увеличивается вертикаль-

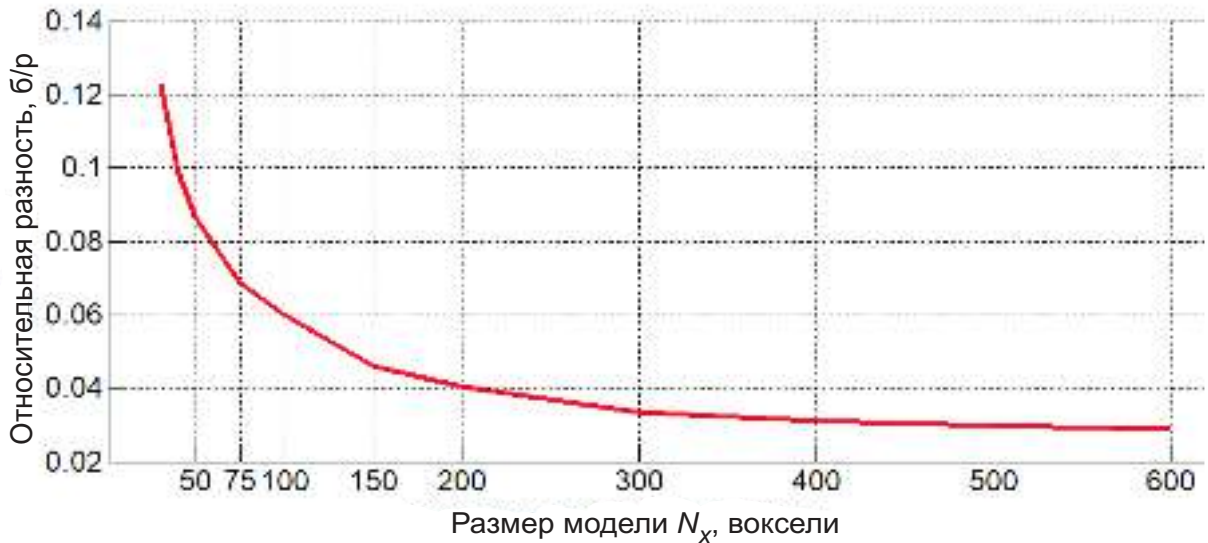


Рисунок 3.6 – Уменьшение относительной разности значений эффективного тензора жёсткости при увеличении горизонтального размера модели породы

ный размер модели слоистой породы

$$N_z = 30, 60, 90, 120, 180, 240, 300, 390, 480, 600$$

при её фиксированном размере $N_x = 30$ (Рисунок 3.7). Мощность прослоя $L_z = 6$, а количество слоёв увеличивается пропорционально увеличению размера: при $N_z = 30$ модель включает один прослой, при $N_z = 60$ - два и так далее.

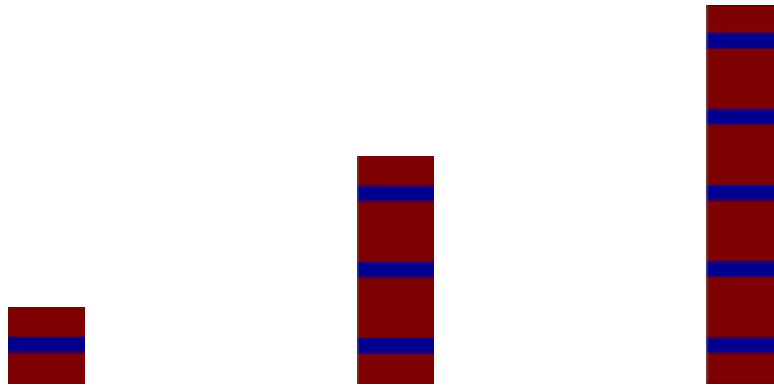


Рисунок 3.7 – Схема увеличения вертикального размера модели слоистой породы с увеличением количества слоёв

Относительная разность значений эффективного тензора жёсткости, вычисленного с использованием разработанного алгоритма, и результата, полученного методом Шёнберга, при увеличении вертикального размера модели породы и количества прослоев уменьшается, но из-за малого горизонтального размера остаётся

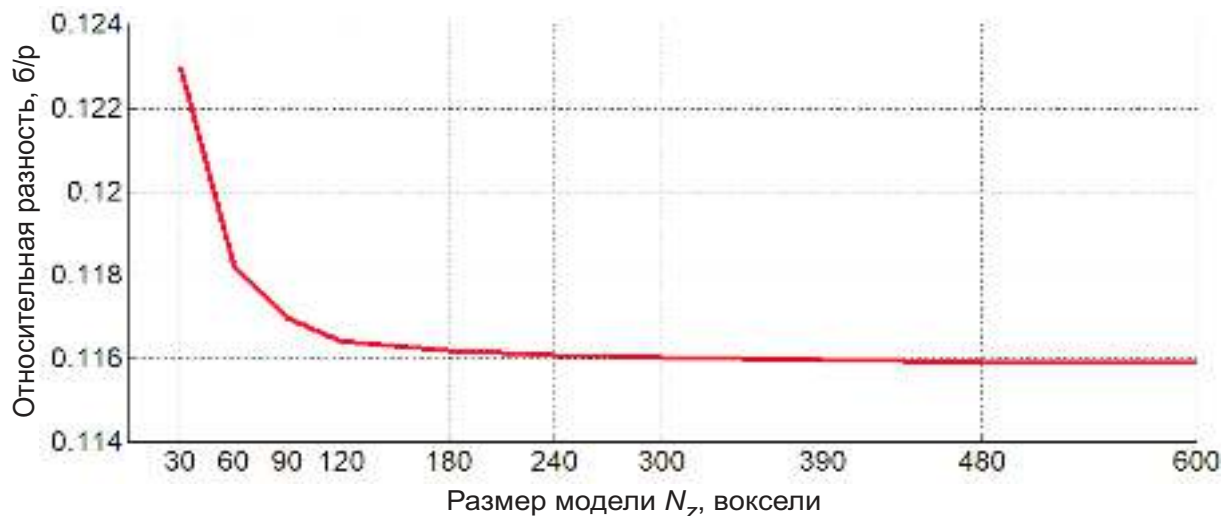


Рисунок 3.8 – Уменьшение относительной разности значений эффективного тензора жёсткости при увеличении вертикального размера модели породы и постоянном горизонтальном размере $N_x = 30$

достаточно большой (Рисунок 3.8). Поэтому в следующей серии расчётов он фиксируется другим: $N_x = 600$ при прежних остальных параметрах (Рисунок 3.9). В этом случае график той же зависимости выглядит похоже, но значения относительной разности существенно уменьшаются и, начиная с размера $N_z = 180$, становятся меньше 1% (Рисунок 3.10). Видно хорошее согласование с эффективными упругими параметрами тонкослоистой среды бесконечного простираения, полученными методом осреднения Шёнберга.

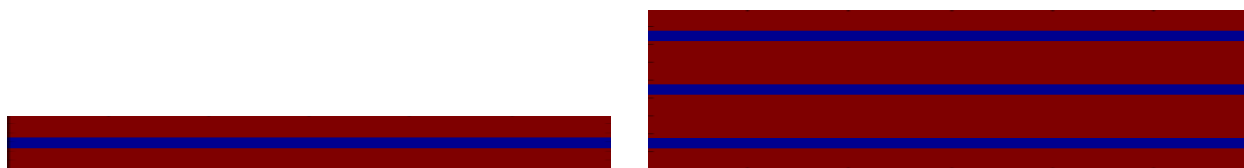


Рисунок 3.9 – Увеличение вертикального размера модели слоистой породы при горизонтальном размере $N_x = 600$

Таким образом при увеличении размера модели слоистой породы вдоль и поперек горизонтальных прослоев относительная разность вычисленных значений упругих параметров указанными способами существенно сокращается, причем горизонтальный размер играет решающую роль, поскольку модель приближается к среде бесконечного простираения.

В третьей серии расчётов размер модели фиксирован $N_x = 500$, $N_z = 500$, но меняются мощность и количество слоев при их постоянной суммарной части

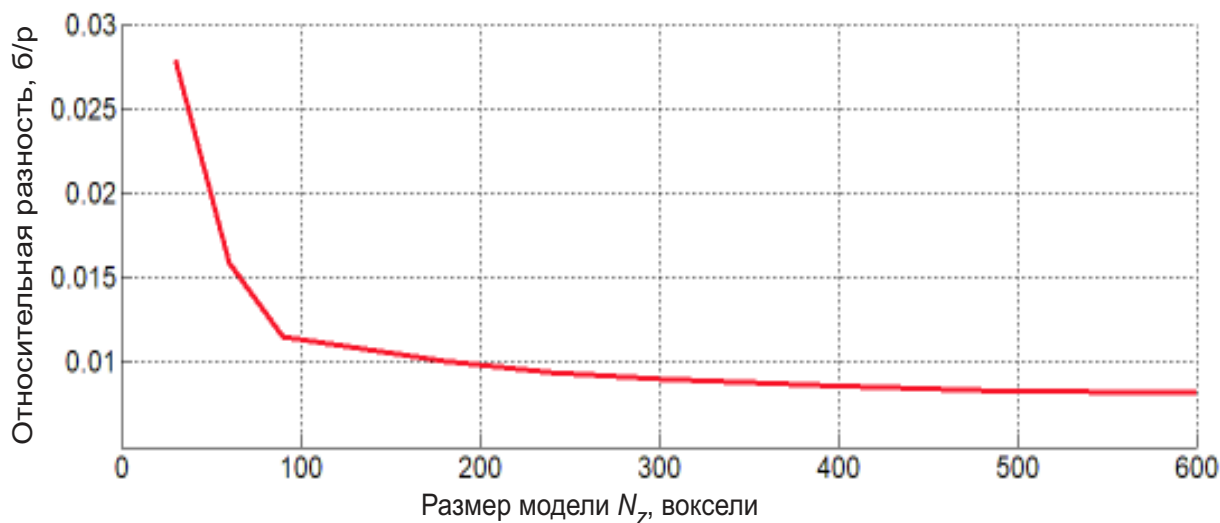


Рисунок 3.10 – Уменьшение относительной разности значений эффективного тензора жёсткости при увеличении вертикального размера модели породы и постоянном горизонтальном размере $N_x = 600$

во вмещающей среде (Рисунок 3.11). В этих расчётах мощность каждого прослоя

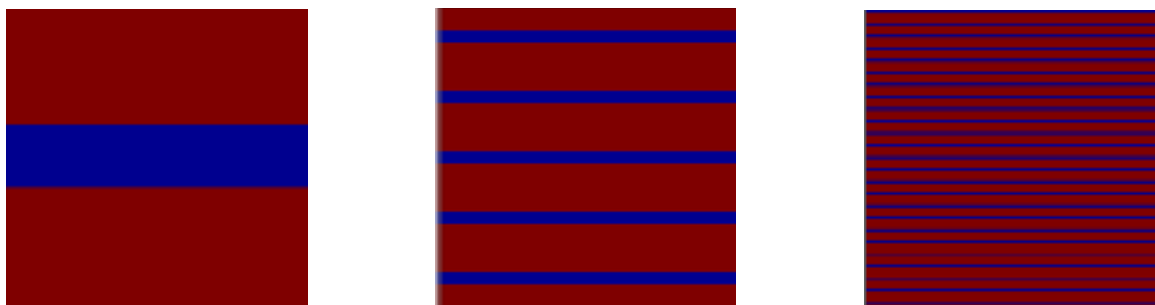


Рисунок 3.11 – Схема увеличения числа горизонтальных прослоев при фиксированном размере модели слоистой породы

уменьшается

$$L_z = 100, 50, 20, 10, 5, 4, 2, 1$$

с увеличением их количества

$$N = 1, 2, 5, 10, 20, 25, 50, 100.$$

Результаты третьей серии расчётов при увеличении количества прослоев показывают, что относительная разность в сравнении с результатом метода Шёнберга, падает, и при числе слоев $N = 100$ она менее одного процента (Рисунок 3.12) [Reshetova, Khachkova, 2017]. Это подтверждает достоверность оценок, поскольку при уменьшении мощности прослоев условия численного расчёта всё более приближаются к условию тонкослоистости модели Шёнберга.

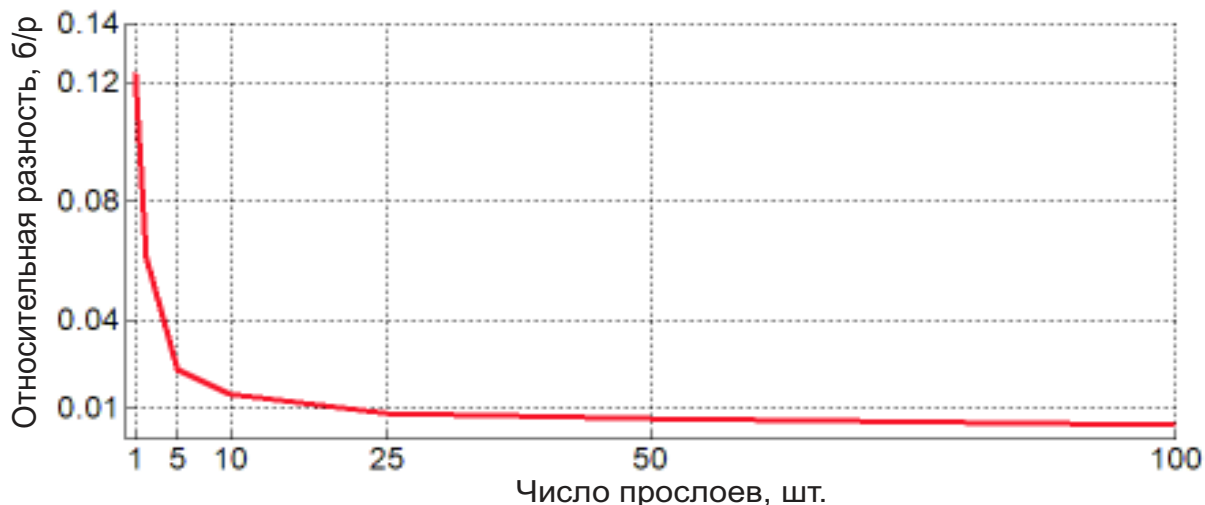


Рисунок 3.12 – Уменьшение относительной разности значений эффективного тензора жёсткости при увеличении количества слоев и фиксированном размере модели

Следующая серия тестовых расчётов выполняется для модели с прослоями, наклонёнными под углом 45° (Рисунок 3.13). Количество прослоев увеличивается

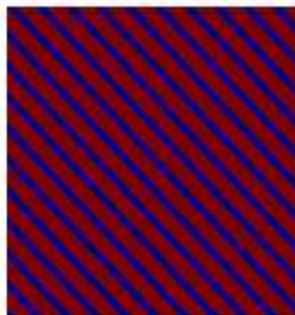


Рисунок 3.13 – Квадратная модель слоистой породы с прослоями более мягкого материала под углом 45°

с последовательным увеличением размера модели породы:

$$N_x = N_z = 30, 60, 90, 120, 180, 240, 300, 390, 480, 600.$$

При этом мощность прослоя более мягкого материала $L_z = 6$, а количество прослоев соответственно

$$N = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 13, 16, 20.$$

Результаты сопоставления вычисленных параметров с параметрами, полученными методом Шёнберга (Рисунок 3.14), показывают, что определяемая относительная разность значений чуть больше, чем в модели с горизонтальными слоями, но при увеличении размера модели и количества слоев она также уменьшается,

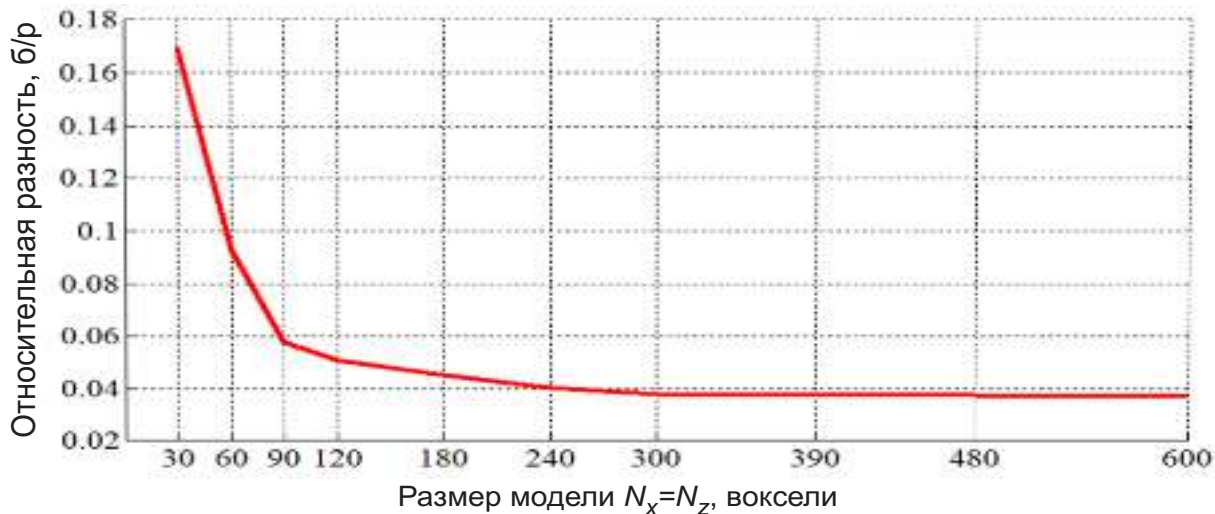


Рисунок 3.14 – Уменьшение относительной разности значений эффективного тензора жёсткости при увеличении размера модели с прослоями под углом 45°

достигая при $N_x = N_z = 600$ значения менее 4%.

Таким образом, выполненные численные исследования показывают высокую точность определения эффективных упругих параметров слоистой породы разработанным алгоритмом, поскольку при малой мощности прослоя, когда модель породы значительно вытянута вдоль слоя (нескольких слоев), т.е. при условиях, близких к предполагаемой тонкослоистости и бесконечности простираения в методе Шёнберга, результаты, полученные указанными методами, очень близки. А модель слоистой породы с долей более мягкого материала в 20% от её ширины и соотношением размеров её сторон не менее 1:20 можно рассматривать как близкую по эффективным упругим параметрам к тонкослоистой среде бесконечного простираения.

Численные исследования для трёхмерных моделей породы с однородными изотропными слоями подтверждают выводы, полученные для двумерного случая. При увеличении размера модели и уменьшении мощности прослоев относительная разность с результатом, полученным методом Шёнберга, падает, достигая 1-2% при размерах $N_x = 512$, $N_y = 512$, $N_z = 30$, причем горизонтальный размер также играет решающую роль.

Более подробно исследуется трёхмерная модель породы с измельчением слоёв, когда при её фиксированном размере $N_x = 512$, $N_y = 512$, $N_z = 512$ уменьшается мощность прослоев

$$Lz = 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2$$

и увеличивается их количество

$$N = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$$

при их постоянном суммарном относительном объёме в 25%.

Сначала расчёты выполняются для трёхмерной модели породы с горизонтальной слоистостью (Рисунок 3.15).



Рисунок 3.15 – Трёхмерная модель породы с тонкими горизонтальными слоями

Результаты расчётов показывают, что относительная разность значений эффективного тензора жёсткости, вычисленных разработанным алгоритмом и методом Шёнберга, при увеличении количества прослоев (и уменьшении их мощности) значительно снижается и становится менее 2% (Рисунок 3.16).

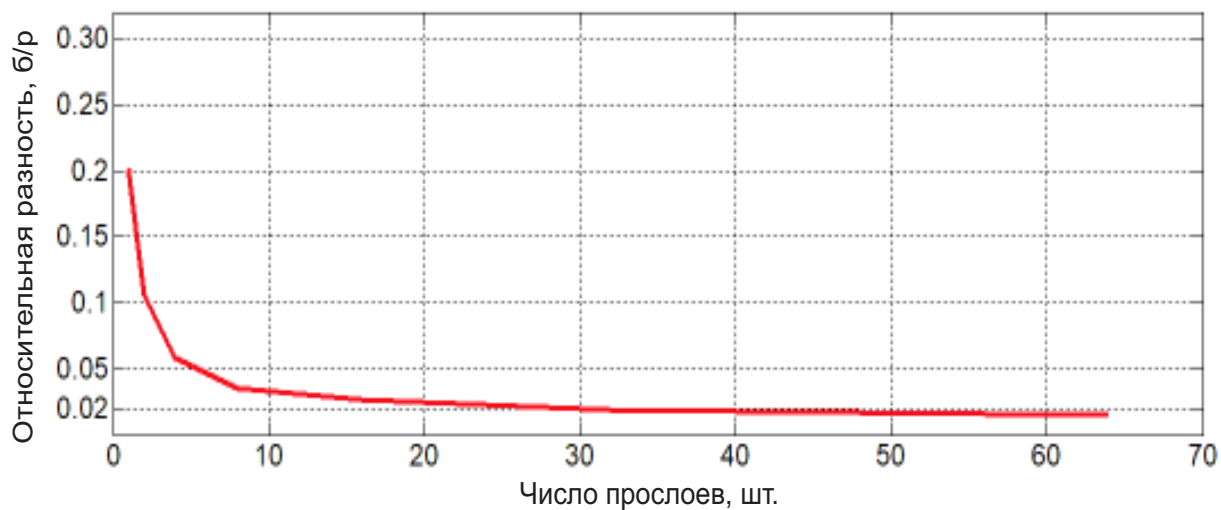


Рисунок 3.16 – Уменьшение относительной разности значений эффективного тензора жёсткости при увеличении количества горизонтальных прослоев в трёхмерной модели породы

Затем рассматривается набор моделей породы с наклонной под углом 45° слоистостью (Рисунок 3.17), при этом количество слоёв также растёт, а их мощ-

ность уменьшается. Видно, что при этом относительная разность между значени-



Рисунок 3.17 – Трёхмерная модель породы с наклонной под углом 45° слоистостью

ями эффективного тензора жёсткости уменьшается и при количестве слоёв более 20 достигает 4% (Рисунок 3.18).

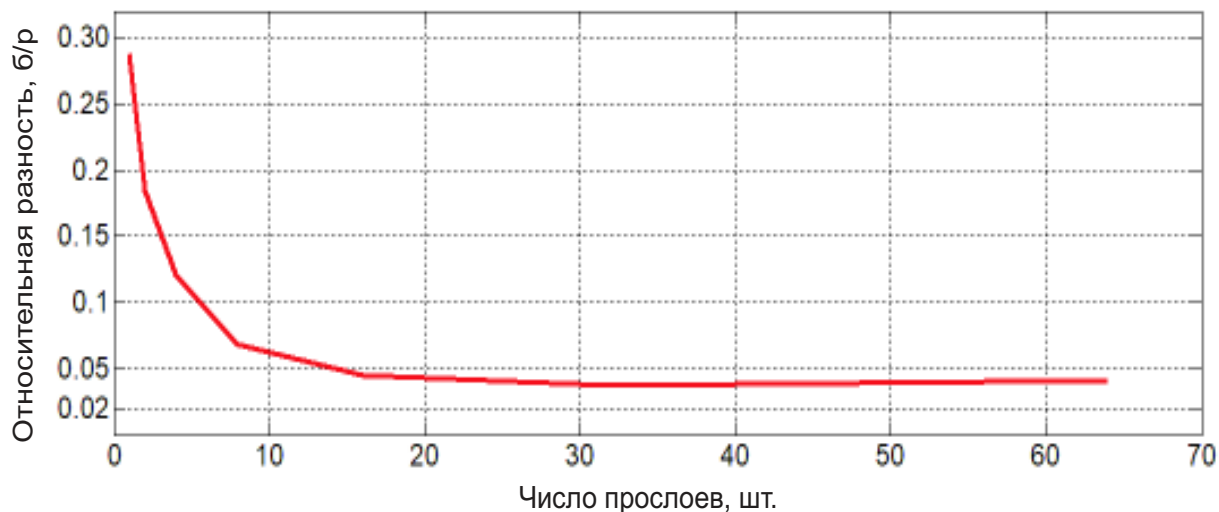


Рисунок 3.18 – Уменьшение относительной разности значений эффективного тензора жёсткости при увеличении количества прослоев в трёхмерной модели породы с наклонной под углом 45° слоистостью

Наконец, расчёты выполняются для моделей с наклонным под углом 45° падением слоев по двум разным направлениям в горизонтальной плоскости (Рисунок 3.19). Их результаты показывают, что относительная разность значений эффективного тензора жёсткости, рассчитанных указанными алгоритмами, с уменьшением мощности прослоев значительно снижается и при их количестве больше 16 становится 5% и менее (Рисунок 3.20).

Таким образом, численные исследования для трёхмерных моделей с горизонтальной и наклонной слоистостью показали, что при достаточно тонких слоях и



Рисунок 3.19 – Трёхмерная модель породы с наклонным под углом 45° падением слоев по двум разным направлениям



Рисунок 3.20 – Уменьшение относительной разности значений эффективного тензора жёсткости при увеличении количества прослоев в трёхмерной модели породы с двумя наклонами слоёв под углом 45°

большом горизонтальном размере, т.е. при их приближении к тонкослоистой модели Шёнберга бесконечного простирания, относительная разность результатов, полученных указанными алгоритмами, достигает минимальной величины 1-2% для горизонтальных прослоев и 4-5% для наклонных, что подтверждает высокую точность представленного алгоритма [Reshetova, Khachkova, 2019].

Оценка эффективных упругих параметров консолидированной горной породы по цифровой модели образца

Вычисление эффективных упругих параметров выполняется для трёхмерной цифровой модели известняка размером $512 \times 512 \times 768$ вокселей, построенной по его томографическому изображению с разрешением 3.44 мкм на воксель (Рисунок 3.21). Изображения образца, а также значения упругих параметров, получен-

ные лабораторными экспериментами, подготовлены и предоставлены коллегами из Университета Австралии (Curtin University, Perth, Australia).

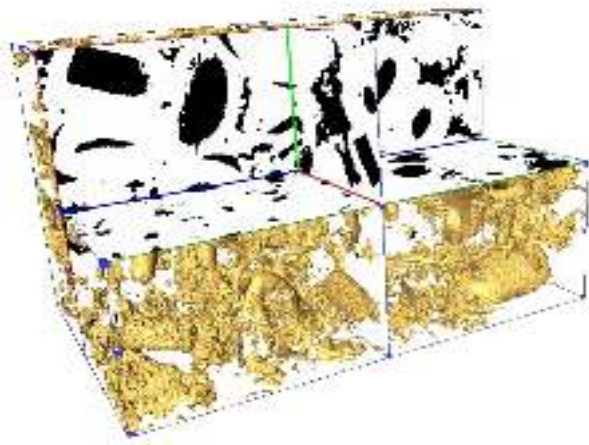


Рисунок 3.21 – Трёхмерная цифровая модель образца известняка. Чёрным изображены поры, белым - скелет, жёлтым - границы между ними

Расчёт тензора жёсткости известняка выполняется для упругих параметров скелета: $v_p = 5600$ м/с, $v_s = 2620$ м/с, $\rho = 2700$ кг/м³. По полученным эффективным упругим параметрам породы строится наиболее приближённая модель однородной изотропной среды, тензор жёсткости которой представляется в виде матрицы (3.52) с константами Ламе, по которым затем вычисляются соответствующие скорости продольных и поперечных волн [цит. по: Боганик и др., 2006]:

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (3.53)$$

Полученные значения $v_p = 3652$ м/с, $v_s = 1784$ м/с сопоставляются со значениями скорости продольных и поперечных волн, измеренными в лаборатории: $v_p = 3727$ м/с, $v_s = 1858$ м/с. Разница составляет $\sim 4\%$, что подтверждает высокую точность результатов, полученных с использованием разработанного алгоритма [Reshetova, Khachkova, 2019].

3.3 Двухмасштабный вариант алгоритма геостатистической оценки эффективных упругих параметров цементированной породы с учётом влияния межзернового материала

При разработке двухмасштабного варианта алгоритма в качестве примера цементированной породы рассматривается образец песчаника обнажения Берсиммер (Австралия). Для оценки его эффективных упругих параметров используется численная модель, построенная по его томографическому изображению оптимального разрешения 3.44 мкм на воксель (Рисунок 3.22) [Хачкова и др., 2017]. На

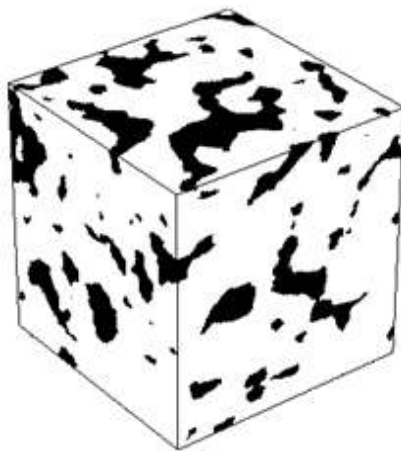


Рисунок 3.22 – Трёхмерная бинарная модель образца песчаника обнажения Берсиммер (Австралия). Скелет - белым цветом, поры - черным

рисунке видно, что она не содержит информации о контактах между зёрнами и заполняющем их цементирующем материале, который, как установили исследователи, существенно влияет на оценку упругих параметров цементированной породы [Madonna et al., 2012; Saenger et al., 2016]. Такая информация появляется при большем разрешении изображений. Поэтому для учёта влияния цемента используются изображения поверхности (SEM-изображения) этого песчаника, полученные с помощью электронного сканирующего микроскопа Phenom при ускоряющем напряжении 10 кВт с кратным увеличением в 300 - 6400 раз (Рисунок 3.23), предоставленные коллегами из Университета Австралии (Curtin University, Perth, Australia). На этих изображениях контакты между зёрнами видны отчётливо, поскольку их детальность превосходит детальность томографических изображений примерно в 50 – 100 раз.

В этом варианте алгоритма оценки эффективных упругих параметров для

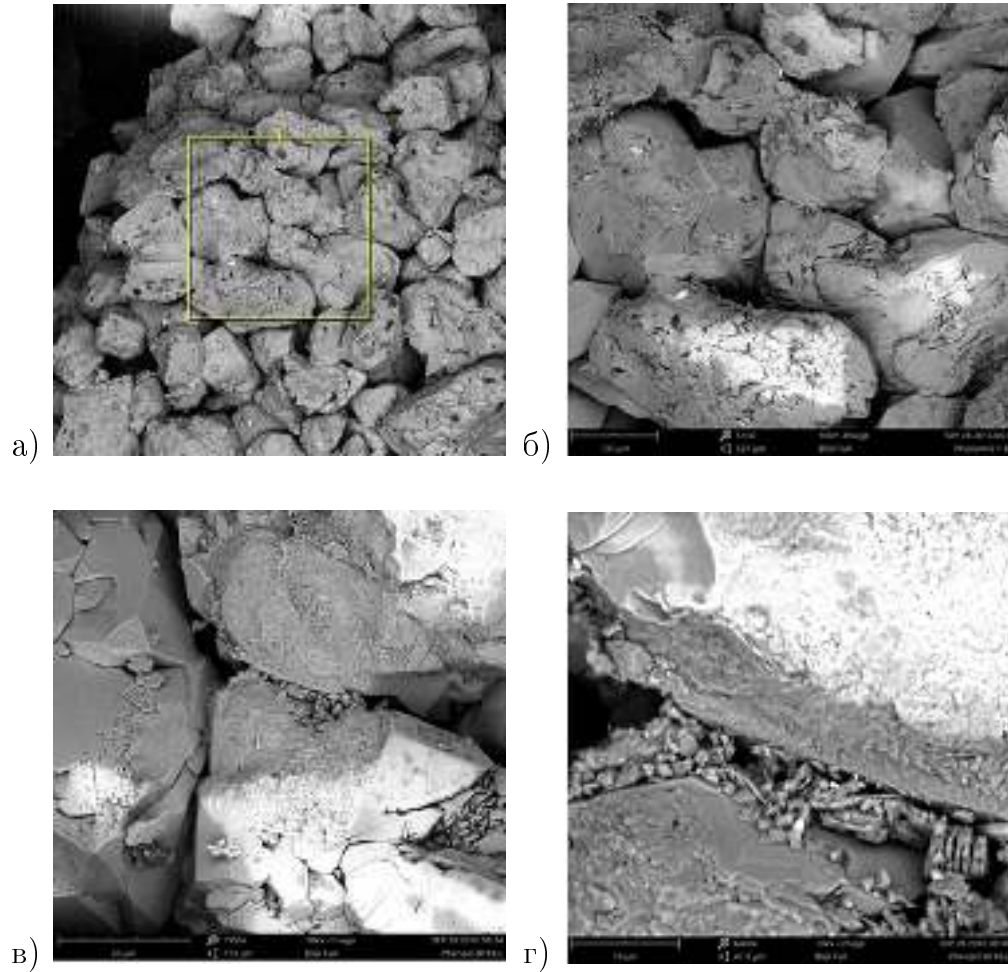


Рисунок 3.23 – Изображения поверхности песчаника, полученные с использованием электронного сканирующего микроскопа с увеличением в 300 (а), 510 (б), 1550 (в), 6400 (г) раз, размер видимой области в микрометрах - 1343 (а), 527 (б), 175 (в), 41 мкм (г) .

сцементированной породы SEM-изображения используются для набора статистических данных о структуре контактов между зёрнами, по которым оценивается распределение упругих параметров цементирующего материала, заполняющего пространство между зёрнами. Это позволяет добавить в численную модель сцементированной породы необходимую информацию о межзерновых контактах, учесть влияние цементирующего материала и таким образом значительно уточнить оценку вычисляемых упругих параметров породы [Хачкова и др., 2017; Хачкова и др., 2018].

3.3.1 Численное разделение модели сцементированной породы на зёрна и прослой между ними по результатам топологического анализа

Для численного разделения трёхмерной бинарной модели образца сцементированной породы на отдельные зёрна и прослой между ними определённой толщины моделируется эрозия скелетного пространства, которое последовательно уменьшается на 1 воксель на каждом шаге [Хачкова и др., 2018].

Пусть M_0 - начальное трёхмерное тело скелета, а $M_1 \dots M_N$ - последующие трёхмерные тела, соответствующие своему уровню эрозии, такие что $M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_N$. Чтобы восстановить топологические свойства связности тел M_i и построить дерево распада T , которое отражает динамику постепенного изменения компонентов связности скелета в процессе эрозии, используется метод персистентных гомологий [Edelsbrunner et al., 2002]. Пусть каждый узел в дереве на i -м уровне соответствует компоненте связности M_i i -го уровня эрозии (Рисунок 3.24). Если компонента после следующего шага эрозии распадается на несколько, тогда

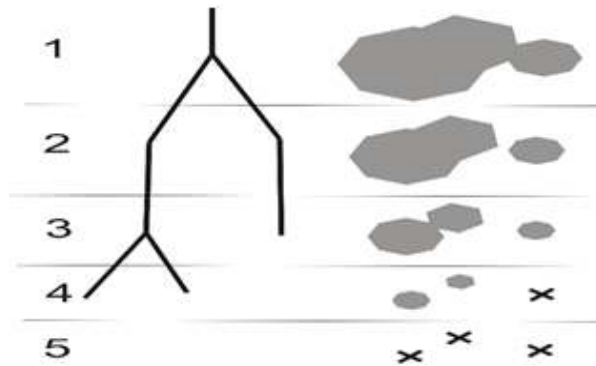


Рисунок 3.24 – Схема построения дерева распада компонентов связности скелета. Слева - номер уровня эрозии, в центре - дерево распада, справа - двумерное изображение постепенного изменения компоненты связности скелета в процессе эрозии. Крестики - координаты центров исчезнувших компонентов связности.

в соответствующем узле появляются дочерние элементы. При этом узел является листом, если после следующего шага эрозии компонента связности исчезает. Поскольку дерево распада устойчиво относительно возмущения исходной последовательности M_i , то это построение также устойчиво в отношении шума исходного трёхмерного изображения.

Далее по построенному дереву распада восстанавливается набор зёрен сцементированной породы, при этом каждому листу дерева T ставится в соответствие

зерно породы следующим образом: центр массы компоненты листа - это центр зерна, изображённый на схеме крестиком (Рисунок 3.24). Затем для каждого листа u дерева распада находится его родительский узел v , в котором лист u встречается соседний узел. Рассматривается разность r уровней эрозии листов u и v и устанавливается, что лист u имеет вес r . При этом считается, что вес пропорционален диаметру зерна. После этого рассматривается взвешенная диаграмма Вороного W совокупности центров зёрен с соответствующими весами, т.е. для каждого вокселя с координатами \vec{x} строится массив расстояний до каждого центра зерна с координатами \vec{x}_j по правилу

$$d_j(\vec{x}) = \|\vec{x} - \vec{x}_j\|_2^2 - r_j^2, \quad (3.54)$$

где r_j - вес j -го зерна. Тогда рассматриваемый воксель принадлежит зерну J_0 , если

$$d_{J_0}(\vec{x}) = \min_j d_j(\vec{x}). \quad (3.55)$$

Чтобы восстановить межзерновое пространство толщиной ε , необходимо для каждого вокселя \vec{x} скелета найти два ближайших зерна с номерами J_1 и J_2 . Тогда воксель принадлежит границе J_1J_2 , если

$$\frac{d_{J_1}(\vec{x}) - d_{J_2}(\vec{x})}{2 \|\vec{x}_{J_1} - \vec{x}_{J_2}\|_2} \leq \varepsilon. \quad (3.56)$$

Таким образом, перебирая все воксели модели горной породы, определяется, принадлежит ли он какому-либо зерну или межзерновому пространству определённой толщины. В последнем случае численное значение в модели изменяется на индивидуальный номер пространства между зёрнами, т.е. разные контакты нумеруются по-разному. В итоге получается новая численная модель сцементированной породы, в которой зёрна отделены друг от друга тонкими прослойками (Рисунок 3.25) [Хачкова и др., 2018].

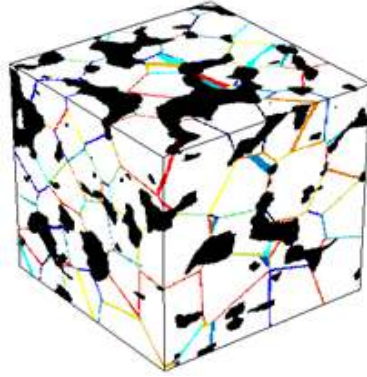


Рисунок 3.25 – Трёхмерная численная модель образца песчаника после топологического разделения на зёрна

Скелет - белым цветом, поры - черным, межзерновые контакты - разным цветом.

3.3.2 Геостатистическая оценка эффективных упругих параметров межзернового цементирующего материала

Для статистической оценки эффективных упругих параметров цементирующего материала между зёрнами песчаника сначала по SEM-изображениям поверхности образца этого песчаника статистически оцениваются параметры межзерновых контактов - длина контакта, его средняя толщина, отношение этих величин, а также длина корреляции и стандартное отклонение (Рисунок 3.26 а).

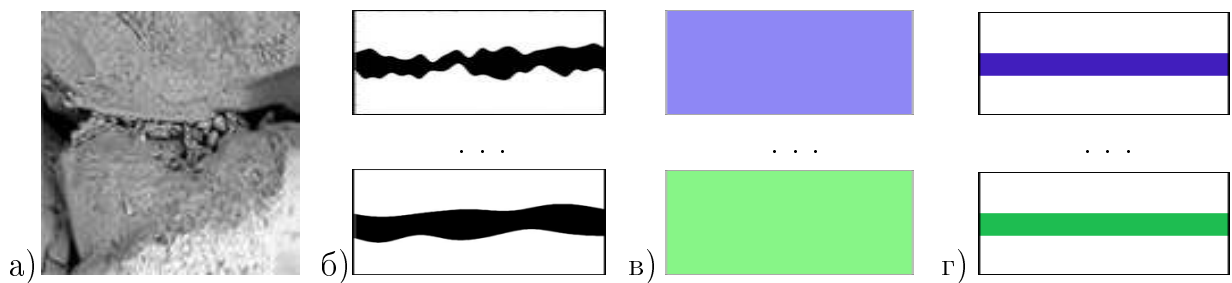


Рисунок 3.26 – Схема этапов статистического моделирования эффективных упругих параметров цементирующего межзернового материала в песчанике

- а) пример SEM-изображения контакта зёрен;
- б) статистические реализации численной модели межзернового контакта с шероховатой границей;
- в) усредненные однородные модели, эквивалентные моделям б и г;
- г) численные модели межзернового контакта с плоской границей с такими же эффективными упругими параметрами, как у соответствующей модели б.

Собранные данные по структуре контактов зёрен используются для стати-

стического моделирования шероховатой границы в численной модели межзернового контакта (Рисунок 3.26 б). При этом рассматривается случай поверхности зерна, описываемой нормально распределенным случайным полем. Исходя из полученных данных, длина корреляции I и стандартное отклонение σ для моделирования границы раздела задаются в интервалах $I \in [0.1L, 1.6L]$, $\sigma \in [0.03L, 0.2L]$, где L - средняя толщина межзернового пространства, а численная модель контакта между зёрнами создаётся размером $5L$ поперек и $50L$ вдоль направления среднего слоя (Рисунок 3.26 б). При этом граница раздела моделируется как одномерный стационарный гауссовский случайный процесс, который полностью описывается математическим ожиданием и функцией ковариации. Рассматривается пять значений длины корреляции $I = [0.1L, 0.2L, 0.4L, 0.8L, 1.6L]$ и четыре для стандартного отклонения $\sigma = [0.03L, 0.05L, 0.1L, 0.2L]$ при $L = 100$ точек.

Кроме геометрической формы шероховатой границы, определяемой длиной корреляции и стандартным отклонением, в моделях межзернового контакта варьируются упругие параметры. Механические параметры зёрен кварца, изображённых белым цветом (Рисунок 3.26 б), остаются постоянными: объёмный модуль упругости K_g составляет 36.7 ГПа и модуль сдвига μ_g - 44 ГПа. А механические параметры более мягкого цемента, изображённого черным цветом (Рисунок 3.26 б), варьируются: $(K_1, \mu_1) = (11.9, 6)$ ГПа, $(K_2, \mu_2) = (16, 10.7)$ ГПа, $(K_3, \mu_3) = (20.5, 16.8)$ ГПа, $(K_4, \mu_4) = (25.3, 24.2)$ ГПа, $(K_5, \mu_5) = (30.5, 33)$ ГПа, то есть рассматривается пять контрастных значений механических параметров зёрен и цементирующего материала. После чего исследуется влияние шероховатости поверхности зерна и параметров цемента на эффективные упругие параметры межзернового контакта [Bazaikin, Khachkova et al., 2018].

Итак, для каждого из 100 фиксированных триплетов $(I_i, \sigma_j, (K, \mu)_k)$ статистически моделируется по 100 реализаций численной модели межзернового шероховатого контакта зёрен, то есть всего создаётся 10000 разных вариантов (Рисунок 3.26 б). После чего выполняется преобразование каждой модели межзернового шероховатого контакта: строится его новая численная модель с плоскими границами между зёрнами и толщиной L между ними (Рисунок 3.26 г) с такими же эффективными упругими параметрами, как у соответствующей исходной (Рисунок 3.26 б). Преобразование выполняется в два этапа: сначала разработанным алгоритмом

вычисляются эффективные упругие параметры исходной модели в виде тензора жёсткости для эквивалентной усреднённой однородной модели (Рисунок 3.26 в). А поскольку эффективный тензор жёсткости, рассчитанный для новой модели с плоскими границами цемента по формулам Шёнберга [Schoenberg et al., 1989], должен быть таким же, то с помощью обращённых формул Шёнберга вычисляются эффективные упругие параметры "нового" цемента, заполняющего плоский контакт между зёрнами. Т.е. в результате такого преобразования вычисляются эффективные упругие параметры "нового" межзернового материала, изображённого разным цветом (Рисунок 3.26 г), которые включают в себя информацию о конкретной шероховатости контакта (Рисунок 3.26 б).

Такие вычисления выполняются для каждой из 10000 моделей, после чего статистически анализируется набор полученных эффективных тензоров жёсткости "нового" цемента. Результаты анализа показывают, что

- компоненты тензоров жёсткости в целом нормально распределены, как видно на примере плотности распределения компонент упругих тензоров (Рисунок 3.27) для случая $I = 0.4L$, $\sigma = 0.1L$ и упругих параметров исходного цементирующего материала (K_1, μ_1) - максимального контраста в упругих свойствах зёрен и цемента;
- их средние значения по наборам моделей с одинаковыми упругими параметрами исходного цементирующего материала, отличающихся только шероховатостью межзерновых контактов, близки к упругим значениям исходного цементирующего материала, а относительная разность почти линейно увеличивается с ростом стандартного отклонения шероховатой границы (Рисунок 3.28);
- покомпонентное стандартное отклонение набора эффективных тензоров жёсткости "нового" цемента почти линейно увеличивается с ростом исходного σ — стандартного отклонения шероховатой границы (Рисунок 3.29). Видно, что эффективные параметры "нового" цемента напрямую зависят от шероховатости зёрен в моделях межзернового контакта.

Таким образом, собранная по SEM-изображениям статистика по структуре межзерновых контактов позволяет статистически смоделировать распределение

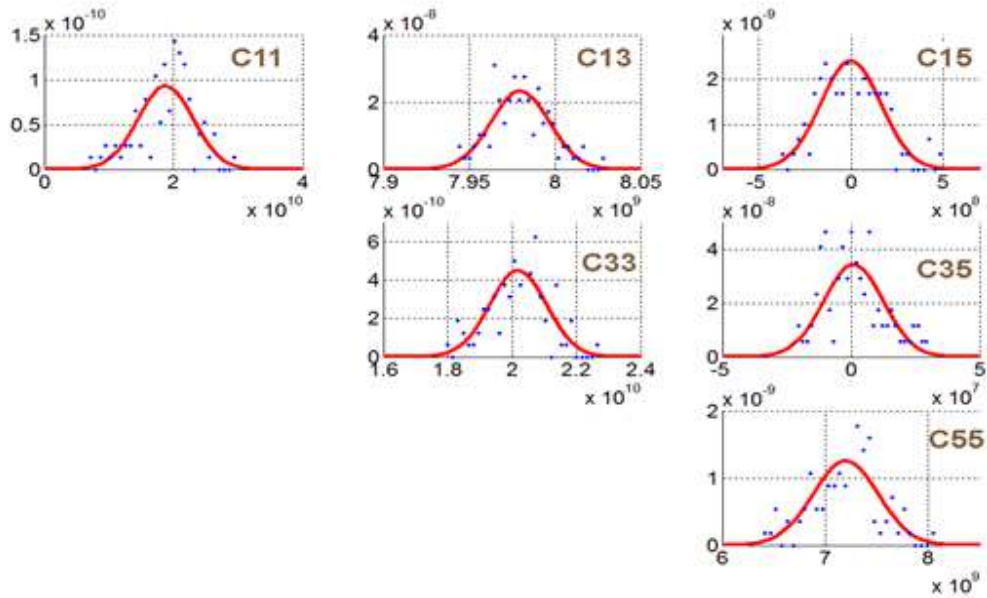


Рисунок 3.27 – Плотность распределения компонент эффективных тензоров жёсткости "нового" цемента при $I = 0.4L$, $\sigma = 0.1L$, (K_1, μ_1)

Синие точки - гистограммы по набору значений компонент тензоров, красные линии - аппроксимация плотности нормального распределения.

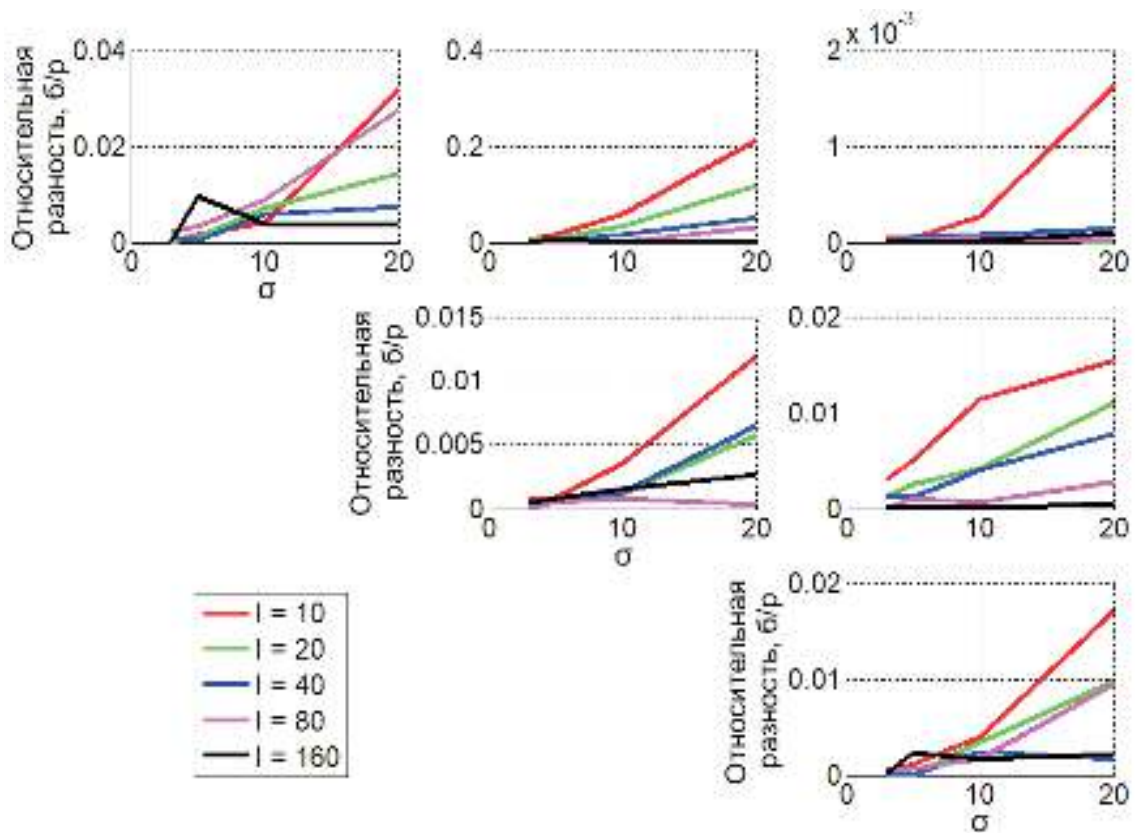


Рисунок 3.28 – Покомпонентная относительная разность тензоров жёсткости для "нового" цемента и исходного в зависимости от стандартного отклонения при контрасте (K_1, μ_1) и разных значениях длины корреляции

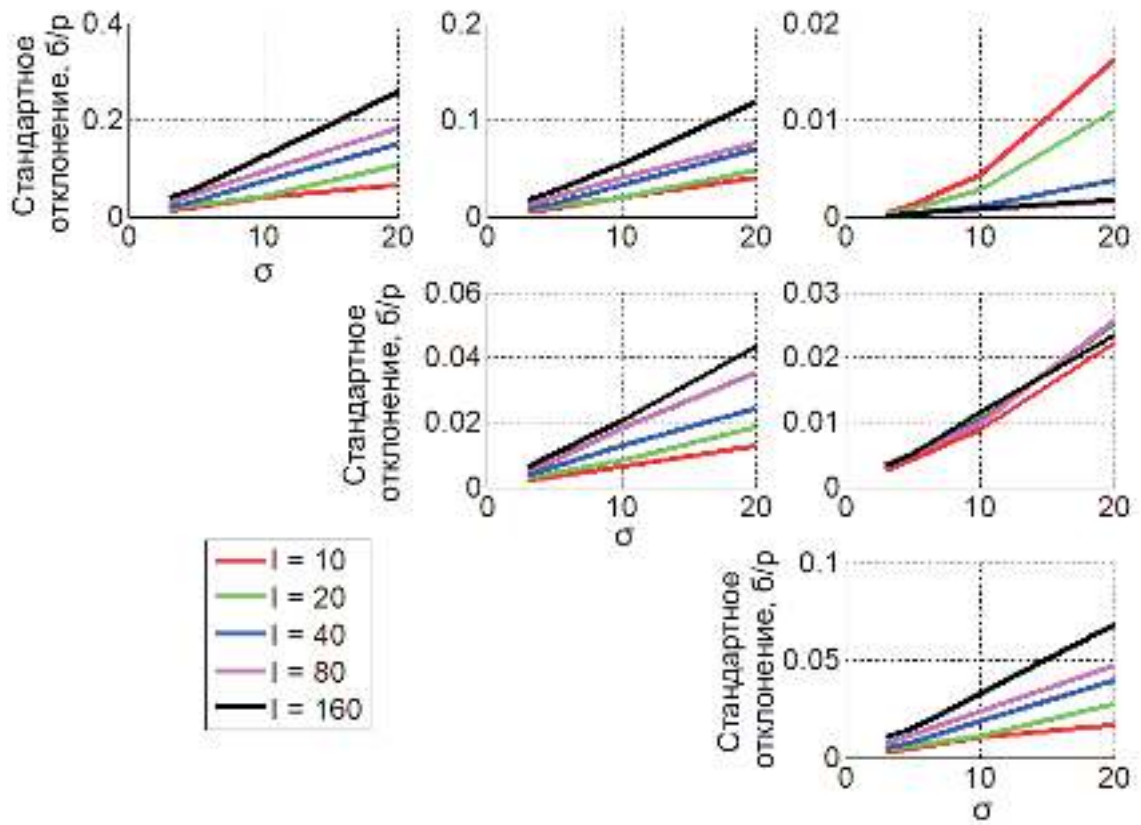


Рисунок 3.29 – Покомпонентное стандартное отклонение набора упругих тензоров жёсткости "нового" цемента в зависимости от значений стандартного отклонения шероховатой границы

Цветом - разные значения длины корреляции для шероховатой границы.

эффективных упругих параметров цементирующего материала, которое можно использовать в численной модели образца сцементированной породы с выделенными плоскими границами между зёрен, чтобы учесть влияние цементирующих прослоек при оценке эффективных упругих параметров этой породы [Bazaikin, Khachkova et al., 2018].

3.3.3 Оценка эффективного тензора жёсткости и скорости сейсмических волн в сцементированной породе с учётом её микроструктуры

Для оценки эффективных упругих параметров сцементированной породы её численная модель с выделенными контактами между зёрен заполняется необходимыми упругими параметрами. Поскольку топологический подход позволяет однозначно занумеровать зёрна и прослой между ними, то все межзерновые контакты можно численно заполнить разными статистическими реализациями цемента. При этом поры численно заполняются идеальной жидкостью, а именно водой с плотностью $\rho = 1000$ кг/м³, объемным модулем $K = 2.25$ ГПа и нулевым модулем сдвига. А зёрна - параметрами кварца: плотностью $\rho = 2450$ кг/м³, объемным модулем $K_g = 36.7$ ГПа и модулем сдвига $\mu = 44$ ГПа. После чего разработанным алгоритмом на основе принципа эквивалентности энергий деформации оцениваются эффективные упругие параметры породы [Хачкова и др., 2017; Хачкова и др., 2018].

Выполняется две серии численных исследований. Первая - в предположении, что во всех межзерновых контактах цемент одинаковый, т.е. для численного заполнения используется одна и та же статистическая реализация цемента. Рассматривается набор из 100 моделей породы - по одной для каждой статистической модели, т.е. триплета $(I_i, \sigma_j, (K, \mu)_k)$. Для каждой из них вычисляется эффективный тензор жёсткости и скорости продольных и поперечных волн (при заданной плотности), а для набора в целом - средние значения скоростей и стандартные отклонения от среднего.

Вторая серия расчётов выполняется в предположении, что каждый межзерновой контакт заполняется собственной реализацией статистической модели $(I_i, \sigma_j, (K, \mu)_k)$. В этом случае также рассматривается набор из 100 моделей сцементированной породы, вычисляются эффективные тензоры жёсткости, скорости

продольных и поперечных волн, их средние значения по набору моделей и стандартные отклонения от среднего.

Полученные результаты для двух наборов моделей цементированной породы сопоставляются между собой, а также с соответствующими параметрами, рассчитанными без разделения на зёрна (Рисунок 3.22). На графике (Рисунок 3.30) зависимости скорости сейсмических волн от направления распространения видно, что значения, полученные без учёта влияния межзернового цементирующего материала, значительно завышены, поскольку скелет рассматривается как единое целое и, конечно, получается более жёстким. При заполнении межзернового простран-

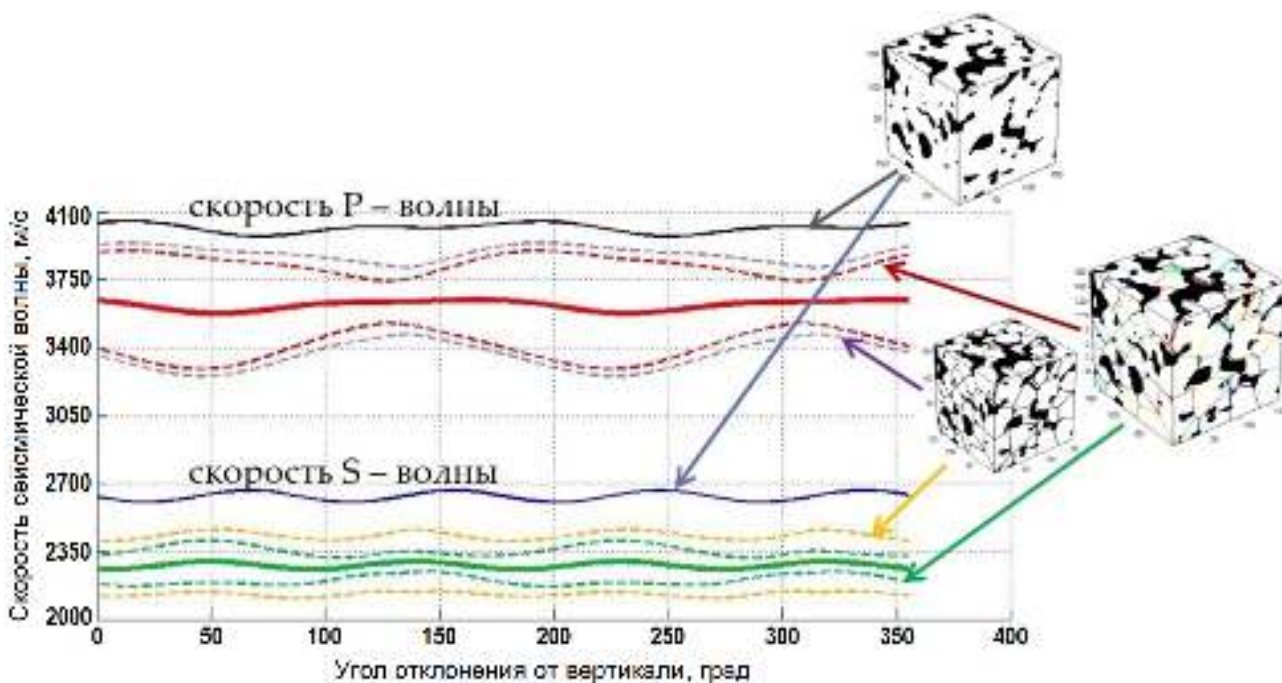


Рисунок 3.30 – Скорость продольных и поперечных волн в зависимости от направления распространения для моделей цементированной породы

Черная и синяя линии - скорость волн без учёта влияния цемента, красные и зелёные сплошные линии - совпадающие средние скорости волн по двум наборам моделей с цементированием, пунктирные линии - доверительные интервалы скоростей: фиолетовые и жёлтые - по набору моделей с одинаковым цементированием, красные и зелёные - по набору моделей с разным цементированием.

ства статистическими параметрами цемента скорости продольных и поперечных волн снижаются до величин, характерных для песчаников. При этом сопоставление значений, полученных для моделей с одинаковым и разным цементированием, показывает, что средние значения скоростей волн для двух наборов моделей попар-

но совпадают. В то же время при индивидуальном цементировании наблюдается меньший доверительный интервал, т.е. оценки эффективных упругих параметров в этом случае более точные [Хачкова и др., 2017; Хачкова и др., 2018].

3.3.4 Сопоставление оценки эффективных упругих параметров песчаника и результатов их лабораторного измерения

Верификация разработанного алгоритма выполняется сопоставлением рассчитанных значений эффективных упругих параметров песчаника со значениями, полученными коллегами из Университета Австралии (Curtin University, Perth, Australia) в результате лабораторных измерений.

Для определения в лабораторных условиях скорости распространения продольных и поперечных волн на ультразвуковой частоте 0.5 МГц используется образец песчаника размером 38,5 мм в диаметре и 75 мм в длину. В то время как для численных расчетов сканируется рентгеновским микроскопом меньший образец - диаметром 5 мм и длиной 14 мм в виде отдельной части общего.

Измеренные скорости сейсмических волн: $V_p = 3480$ м/с и $V_s = 2340$ м/с при погрешности 0.5 – 0.7%, а средние по набору моделей расчётные значения: $V_p = 3660$ м/с и $V_s = 2280$ м/с. Сопоставление показывает, что относительная разница составляет 2 – 5%, что подтверждает точность расчёта значений разработанным алгоритмом.

Полученные результаты, их преимущества и значимость

В результате исследований разработан алгоритм численной оценки эффективных упругих параметров горной породы по её цифровым изображениям на основе принципа эквивалентности энергий деформации, высокая точность оценки которым подтверждается сопоставлением результатов расчётов с данными лабораторных измерений упругих параметров консолидированной породы.

Для учёта микроструктуры зёрен и свойств цементирующего материала при оценке упругих параметров разработан новый способ численного разделения модели сцементированной породы на зёрна и прослой между ними заданной толщины с использованием топологического анализа скелетного пространства цифрового образца в процессе эрозии. Также разработан новый способ оценки по данным SEM-изображений породы распределения упругих параметров цементирующего материала, заполняющего пространство между зёрнами, который использует статистический метод моделирования шероховатых границ зёрен в численной модели межзернового контакта и эквивалентное двухшаговое преобразование этих моделей.

В результате для сцементированной породы разработан вариант алгоритма оценки эффективных упругих параметров по цифровым изображениям разного масштаба, в котором, с одной стороны, используется томографическое изображение породы репрезентативного объёма, а с другой, учитывается её микроструктура и свойства цементирующего материала, что выгодно отличает его от известных.

Разработанный алгоритм позволяет получать информацию по цифровым изображениям образца, при этом учитывается влияние более мягкого межзернового цементирующего материала, что значительно повышает степень достоверности оценки указанных параметров.

Заключение

В результате численных исследований разработано два алгоритма оценки эффективных морфологических (пористости, длины корреляции, удельной площади поверхности скелет-поры, её средней кривизны, связности и разветвлённости порового пространства), транспортных (проницаемости, извилистости порового пространства) и упругих параметров (эффективного тензора жёсткости, скорости продольных и поперечных волн) горной породы. Предложенные новые подходы имеют ряд преимуществ по сравнению с известными.

Во-первых, можно получать оценки разных параметров по одному цифровому изображению образца породы, не изменяя её свойств, структуры и без дорогостоящего лабораторного оборудования.

Во-вторых, определяются не только значения репрезентативного объёма цифрового образца для каждого параметра, но и значение оптимального разрешения томографических изображений, которое, как ранее отмечали многие исследователи, необходимо для корректной оценки параметров и позволяет повысить её достоверность, но прежде не было способов его определения.

В-третьих, использование цифровых изображений двух масштабов (томографического и SEM-изображений) при оценке эффективных упругих параметров сцементированной породы даёт возможность учитывать влияние материала, заполняющего межзерновые контакты, что значительно повышает надёжность этой оценки. Выгодными отличиями разработанного алгоритма являются:

- разделение цифровой модели сцементированной породы на зёрна и прослой между ними по результатам топологического анализа делает рассмотрение этой модели более корректным, поскольку межзерновые контакты на томографических изображениях репрезентативного объёма не выделяются, однако учёт материала, который их заполняет, играет значительную роль при оценке;

- вычисление распределения эффективных упругих параметров цементирую-

щего материала по результатам статистического моделирования шероховатых границ зёрен (по данным SEM-изображений породы) и эквивалентного двухшагового преобразования численных моделей межзернового контакта, в отличие от других известных подходов, опирается на информацию о микроструктуре породы и известный диапазон упругих параметров цемента, что позволяет значительно повысить степень надежности оценки;

- численное моделирование трёхосного нагружения на основе принципа эквивалентности энергий деформации для оценки эффективных упругих параметров сцементированной породы за счёт использования уточнённой модели, заполненной полученными эффективными упругими параметрами цемента, позволяет существенно повысить достоверность этой оценки, что подтверждается сопоставлением с результатами лабораторных измерений на пока простейшем примере образцов песчаника.

Разработанные алгоритмы - это первые шаги в исследовании цифровых образцов по направлению построения цифровых моделей месторождений. Несомненно, они требуют своего дальнейшего развития.

Во-первых, необходим переход к полиминеральным горным породам, которых в природе подавляющее большинство. Для этого нужны качественные алгоритмы сегментации, позволяющие создавать многокомпонентную цифровую модель породы. Разработанные алгоритмы оценки подходят для работы с моделями любого минерально-компонентного состава, поэтому могут быть использованы при исследовании и таких пород.

Во-вторых, требуется распространение полученных оценок на масштабы, соизмеримые с разрешающей способностью сейсморазведки. Это направление снизу-вверх (upscaling - в англоязычной литературе), когда необходимо масштабировать совокупность целевых свойств вплоть до размеров нефтегазовых резервуаров.

И наконец, разработанные алгоритмы и полученные оценки создают основу для изучения взаимодействия сейсмических волн с системами трещин и каверн, направленного на получение обоснованной информации о локализации зон повышенной трещиноватости, кавернозности, флюидонасыщения, которая чрезвычайно важна как для поиска, так и для оптимального освоения месторождений углеводородов.

Литература

1. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. — М. : Наука, 2013. — 629 с.
2. Баюк И.О. Междисциплинарный подход к определению эффективных физических свойств коллекторов / И. О. Баюк // Технологии сейсморазведки. — 2011. — № 4. — С. 75–82.
3. Баюк И.О. Основные принципы математического моделирования макроскопических физических свойств коллекторов углеводородов / И. О. Баюк // Технологии сейсморазведки. — 2013. — № 4. — С. 5–18.
4. Баюк И.О. Петрофизические основы многоволновой сейсморазведки / И. О. Баюк, Г. А. Шехтман // Технологии сейсморазведки. — 2014. — № 3. — С. 5–24.
5. Боганик Г.Н. Сейсморазведка: Учебник для вузов / Г.Н. Боганик, И.И. Гурвич. — Тверь: Изд-во АИС, 2006. — 744 с.
6. Вавакин А. С. Эффективные упругие характеристики тел с изолированными трещинами, полостями и жесткими неоднородностями / А. С. Вавакин, Р. Л. Салганик // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1978. — № 2. — С. 95–107.
7. Влияние масштаба микротомографических изображений на оценку макромасштабных свойств породы / Я. В. Базайкин, Т. С. Хачкова [и др.] // Технологии сейсморазведки. — 2016. — № 2. — С. 38–47.
8. Восстановление двумерных возмущений скорости вертикально-неоднородной акустической среды по данным многократного перекрытия (линеаризованная

- постановка) / А.С. Алексеев [и др.] // Геология и геофизика. — 1997. — Т. 38, № 12. — С. 1980–1992.
9. Двухмасштабный численный метод оценки упругих свойств горной породы по цифровым изображениям керна / Т. С. Хачкова [и др.] // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2017. XIII Междунар. науч. конгр. (Новосибирск, 17-21 апреля 2017 г.). — Новосибирск. — 2017. — Т. 4. — С. 118–122.
 10. Исупов Л. П. Вариант метода самосогласования для упругой композитной среды / Л. П. Исупов // Вестник МГУ. Серия 1: Математика, механика. — 1985. — № 6. — С. 62–66.
 11. Канаун С. К. Метод эффективного поля в механике композитных материалов / С. К. Канаун, В. М. Левин. — Петрозаводск: ПУ, 1993. — 598 с.
 12. Козлов Е. А. Модели среды в разведочной сейсмологии / Е. А. Козлов. — Тверь: ГЕРС, 2006. — 480 с.
 13. Кристенсет Р. Введение в механику композитов / Р. Кристенсет. — М. : Мир, 1982. — 384 с.
 14. Ландау Л.Д. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М. : Наука, 1987. — 246 с.
 15. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков / И.И. Ольховский. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 575 с.
 16. Оценка возможности тонких кавернозных прослоев по рассеянным волнам в трещиноватом разрезе Юрубчено-Тохомского месторождения / К.Г. Гадыльшин [и др.] // Технологии сейсморазведки. — 2017. — № 1. — С. 56–62.
 17. Оценка упругих свойств горной породы по цифровому керну на основе геостатистического моделирования / Т. С. Хачкова [и др.] // ГеоЕвразия 2018. Современные методы изучения и освоения недр Евразии: Труды Международной геолого-геофизической конференции (Москва, ЦМТ, 5-8 февраля 2018 г.). — М. — 2018. — С. 448–452.

18. Петрофизические методы исследования кернового материала (Терригенные отложения) / К.В. Воронин [и др.] // М.: Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. Геологический факультет, 2008. — 104 с.
19. Протасов М.И. Выявление зон трещиноватости на основе взвешенного суммирования многокомпонентных данных и спектрального анализа изображений / М.И. Протасов, Г.В. Решетова, В.А. Чеверда // Технологии сейсморазведки. — 2014. — № 1. — С. 59–66.
20. Протасов М.И. Построение сейсмических изображений в истинных амплитудах / М.И. Протасов, В.А. Чеверда // Докл. РАН. — 2006. — Т. 407. — № 4. — С. 528–532.
21. Протасов М.И. Построение трёхмерных дифракционных сейсмических изображений по данным 3D-сейсморазведки на основе Гауссовых пучков / М.И. Протасов, Г.В. Решетова, В.А. Чеверда // Геофизика. — 2017. — № 2. — С. 14–21.
22. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов — М. : Наука, 1979. — 743 с.
23. Рассеянные волны: численное моделирование и построение изображений. Часть 1: Двумерные среды / В.В. Лисица [и др.] // Технологии сейсморазведки. — 2013. — № 1. — С. 46–58.
24. Решетова Г.В. Численный метод оценки эффективных упругих характеристик горной породы по двумерным и трехмерным цифровым изображениям керна / Г.В. Решетова, Т.С. Хачкова // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии: Электронный научный журнал. — 2017. — Т.18. — № 4. — С. 416–433.
25. Роменский Е.И. Термодинамически согласованная система законов сохранения течения сжимаемой жидкости в пористой упругой среде / Е. И. Роменский // Сиб. журн. индустриальной математики. — 2011. — Т.14. — № 4. — С. 86–97.

26. Салганик Р.Л. Механика тел с большим числом трещин / Р.Л. Салганик// Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1973. — № 4. — С. 65–75.
27. Самарский А.А. Численные методы математической физики / А.А. Самарский, А.В. Гулин. — М.: Научный мир, 2003. — 316 с.
28. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1 / Л.И. Седов. — М.: Наука, 1970. — 492 с.
29. Сендецки Дж. Упругие свойства композитов. Механика композитных материалов. Т. 2 / Дж. Сендецки. — М.: Мир, 1978. — 568 с.
30. Хорошун Л.П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред / Л. П. Хорошун// Прикладная механика. — 1978. — Т.14. — № 2. — С. 3–17.
31. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред / Т.Д. Шермергор. — М.: Наука, 1977. — 400 с.
32. Aboudi J. Mechanics of Composite Materials: A Unified Micromechanical Approach / J. Aboudi. — Amsterdam: Elsevier Science, 1991. — 328p.
33. A Multi-scale Geostatistical Method of Evaluating the Elastic Properties of Rock from Digital Core / Ya Bazaikin, T. Khachkova [et al.] // Saint Petersburg 2018: 8th Saint Petersburg International Conference and Exhibition Saint Petersburg 2018. Innovations in Geosciences - Time for Breakthrough (Saint Petersburg, Russia, 9-12 April 2018). — Saint Petersburg. — 2018. — С. 44411–44411.
34. Analysis of high-resolution X-ray computed tomography images of Bentheim sandstone under elevated confining pressures / E. H. Saenger [et al.] // Geophysical Prospecting. — 2016. — Vol. 64. — P. 848–859.
35. An efficient approach to converting three-dimensional image data into highly accurate computational models / P. G. Young [et al.] // Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A: Physical Sciences and Engineering. — 2008. — Vol. 366. — P. 3155–3173.
36. An energy-based beam hardening model in tomography / E. Van de Castele [et al.] // Physics in Medicine and Biology. — 2002. — Vol. 47. — P. 4181–4190.

37. An iterative solver for the 3D Helmholtz equation / M. Belonosov [et al.] // Journal of computational physics. — 2017. — Vol. 345. — № 17. — P. 330–344.
38. A petrophysical interpretation using the velocities of P- and S-waves (full waveform inversion) / M. Krief [et al.] // The Log Analyst. — 1990. — Vol. 31. — P. 355–369.
39. A sensitivity study of the effect of image resolution on predicted petrophysical properties / N. Alyafei [et al.] // Transport in Porous Media. — 2015. — Vol. 110. — I. 1. — P. 157–169.
40. Arns C. H. Characterisation of irregular spatial structures by parallel sets and integral geometric measures / C. H. Arns, M. A. Knackstedt, K. R. Mecke // Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects. — 2004. — Vol. 241. — № 1-3. — P. 351–372.
41. Backus G. E. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering / G. E. Backus // Journal of Geophysical Research. — 1962. — Vol. 67. — I. 11. — P. 4427–4440.
42. Bayuk I. O. Correlation between elastic and transport properties of porous cracked anisotropic media / I. O. Bayuk, E. M. Chesnokov // J. Phys. Chem. Earth. — 1998. — Vol. 23. — № 3. — P. 361–366.
43. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. II. Higher frequency range / M. A. Biot // J. Acoustic. Soc. Am. — 1956. — Vol. 28. — P. 179–191.
44. Brunke O. NanoCT: visualizing of internal 3D-structures with submicrometer resolution / O. Brunke, D. Neuber, D. K. Lehmann // Materials Research Society Symposium: Materials, Processes, Integration and Reliability in Advanced Interconnects for Micro- and Nanoelectronics. Materials Research Society, San Francisco, CA. — 2007. — P. 325–331.
45. Brunke O. Precise 3D dimensional metrology using high resolution X-ray computed tomography (mu CT) / O. Brunke, J. Santillan, A. Suppes // In: S.R. Stock (Editor), Developments in X-Ray Tomography VII. Proceedings of SPIE-The

- International Society for Optical Engineering. Spie-Int Soc Optical Engineering, Bellingham. — 2010.
46. Buades A. A non-local algorithm for image denoising / A. Buades, B. Coll, J.-M Morel. // Proceeding of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. — 2005. — Vol. 2. — P. 60–65.
 47. Capdeville Y. 2-D non-periodic homogenization to upscale elastic media for P–SV-waves / Y. Capdeville, L. Guillot, J. J. Marigo // Geophysical Journal International. — 2010. — Vol. 182. — I. 2. — P. 903–922.
 48. Carcione J. M. Computational poroelasticity – A review / J. M.. Carcione, C. Morency, J. E. Santos // Geophysics. — 2010. — Vol. 75. — I. 5. — P. 75A229–275A243.
 49. Characterisation of a single photon counting pixel detector / M. S. Passmore [et al.] // Nuclear Instruments & Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors, and Associated Equipment. — 2001. — Vol. 466. — P. 202–208.
 50. Chesnokov E. Determination of shale stiffness tensor from standard logs / E. Chesnokov, I. Bayuk, M. Ammerman // Geophys. Prosp. — 2010. — Vol. 58. — P. 1063–1082.
 51. Cnudde V. High-resolution X-ray computed tomography in geosciences: A review of the current technology and applications / V. Cnudde, M. N. Boone // Earth-Science Reviews. — 2013. — Vol. 123. — P. 1–17.
 52. Computational elastic up-scaling of sandstone on the basis of x-ray microtomographic images / V. Shulakova [et al.] // Geophysical Prospecting. — 2013. — Vol. 61. — I. 2. — P. 287–301.
 53. Computer simulations of fluid flow in sediment: from images to permeability / J. Toulke [et al.] // The Leading Edge. — 2010. — Vol. 29. — I. 1. — P. 68–74.
 54. De Witte Y. Improved and practically feasible reconstruction methods for high resolution X-ray tomography : дис / Y. De Witte. — Ghent University, 2010.

55. Digital rock physics analysis in complex Carbonates / Z. Kalam [et al.] // World Oil. — 2011. — Vol. 232 — № 5.
56. Digital Rock Physics benchmarks - Part I: Imaging and segmentation / H. Andra [et al.] // Computers and Geosciences. — 2013. — Vol. 50. — P. 25–32.
57. Digital Rock Physics benchmarks - part II: Computing effective properties / H. Andra [et al.] // Computers and Geosciences. — 2013. — Vol. 50. — P. 33–43.
58. Digital rock physics: Effect of fluid viscosity on effective elastic properties / E. H. Saenger [et al.] // Journal of Applied Geophysics. — 2011. — Vol. 74. — I. 4. — P. 236–241.
59. Duda A. Hydraulic tortuosity in arbitrary porous media flow / A. Duda, Z. Koza, and M. Matyka // Phys. Rev. E. — 2011. — Vol. 84. — № 3. — P. 036319.
60. Edelsbrunner H. Topological persistence and simplification / H. Edelsbrunner, D. Letscher, A. Zomorodian // Discrete Computational Geometry. — 2002. — Vol. 28. — P. 511–533.
61. Effect of CT image size and resolution on the accuracy of rock property estimates / Y. Bazaikin, T. Khachkova [et al.] // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. — 2017. — Vol. 122. — P. 3635–3647.
62. Elman H. Preconditioning for the Steady-State Navier - Stokes Equations with Low Viscosity / H. Elman // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1999. — Vol. 20. — № 4. — P. 1299–1316.
63. Erlangga Y.A. On a class of preconditioners for solving the Helmholtz equation / Y.A. Erlangga, C. Vuik, C.W. Oosterlee // Applied Numerical Mathematics. — 2004. — Vol. 50. — № 34. — P. 409–425.
64. Finite element modeling of a multi-physics poro-elastic problem in multiscale media / M. I. Epov [et al.] // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2019. — Vol. 352. — P. 1–22.
65. Finite element modelling of the effective elastic properties of partially saturated rocks / D. Makarynska [et al.] // Computers and Geosciences. — 2008. — Vol. 34. — I. 6. — P. 647–657.

66. From micro to reservoir scale: permeability from digital experiments / J. Dvorkin [et al.] // The Leading Edge. — 2009. — Vol. 28. — I. 12. — P. 1446–1452.
67. Generalized multiscale finite-element method (gmsfem) for elastic wave propagation in heterogeneous, anisotropic media / K. Gao [et al.] // J. Comput. Phys. — 2015. — Vol. 295. — P. 161–188.
68. Gassmann F. Uber die elastizitat poroser medien / F. Gassmann // Vier. der Natur Gesellschaft. — 1951. — Vol. 96. — P. 1–23.
69. Gubernatis J. E. Macroscopic engineering properties of polycrystalline materials: Elastic properties / J. E. Gubernatis, J. A. Krumhansl // J. Appl. Phys. — 1975. — Vol. 46. — P. 1875–1883.
70. Huet C. Coupled size and boundary-condition effects in viscoelastic heterogeneous and composite bodies / C. Huet // Mechanics of Materials. — 1999. — Vol. 31. — I. 12. — P. 787–829.
71. Iassonov P. Segmentation of X-ray computed tomography images of porous materials: A crucial step for characterization and quantitative analysis of pore structures / P. Iassonov, T. Gebrenegus, M. Tuller // Water Resources Research. — 2009. — Vol. 45. — I. 9. — W09415.
72. Improved signal-to-noise ratio in laboratory-based phase contrast tomography / M. N. Boone [et al.] // Microscopy and Microanalysis. — 2012. — Vol. 18. — I. 2. — P. 399–405.
73. Kachanov M. Elastic solids with many cracks and related problems / M. Kachanov // Advan. Appl. Mech. / Ed. by Hutchinson J., Boston T. Wu.: Academic Press. — 1993. — Vol. 30. — P. 259–428.
74. Kaestner A. Imaging and image processing in porous media research / A. Kaestner, E. Lehmann, M. Stampanoni // Adv. in Water Res. — 2008. — Vol. 31. — I. 9. — P. 1174–1187.
75. Keemhm Y. Permeability and relative permeability from digital rocks: Issues on grid resolution and representative elementary volume / Y. Keemhm, T. Mukerji //

- SEG Technical Program Expanded Abstracts 2004. – Society of Exploration Geophysicists, 2004. – P. 1654–1657.
76. Ketcham R. A. Acquisition, optimization and interpretation of X-ray computed tomographic imagery: applications to the geosciences / R. A. Ketcham, W. D. Carlson // *Computers & Geosciences*. — 2001. — Vol. 27. — I. 4. — P. 381–400.
77. Kong T. Y. Digital topology: Introduction and survey / T. Y. Kong, A. Rosenfeld // *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*. — 1989. — Vol. 48. — № 3. — P. 357–393.
78. Kuster G. T. Velocity and attenuation of seismic waves in two phase media. Part 1: Theoretical formulation / G. T. Kuster, M. N. Toksoz // *Geophysics*. — 1974. — Vol. 39. — P. 587–606.
79. Kyriakidis P. C. Calculation of the normal scores variogram used for truncated gaussian lithofacies simulation: theory and fortran code / P. C. Kyriakidis, C. V. Deutsch, M. L. Grant // *Computers and Geosciences*. — 1999. — Vol. 25. — P. 161–169.
80. Madonna C. Digital rock physics: numerical prediction of pressure-dependent ultrasonic velocities using micro-CT imaging / C. Madonna, B. S. G. Almqvist, E. H. Saenger // *Geophysical Journal International*. — 2012. — Vol. 189. — I. 3. — P. 1475–1482.
81. Masson Y. J. Poroelastic finite difference modeling of seismic attenuation and dispersion due to mesoscopic-scale heterogeneity / Y. J. Masson, S. R. Pride // *J. Geophys. Res.: Solid Earth*. — 2007. — Vol. 112. — I. B03. — P. 204.
82. Masson Y. J. Finite-difference modeling of Biot's poroelastic equations across all frequencies / Y. J. Masson, S. R. Pride // *Geophysics*. — 2010. — Vol. 75. — I. 2. — P. N33–N41.
83. Mavko G. The rock physics handbook / G. Mavko, T. Mukerji, J. Dvorkin. — Cambridge University Press, 2009. — 727 p.

84. Mecke K. R. Additivity, Convexity, and Beyond: Applications of Minkowski Functionals in Statistical Physics / K. R. Mecke// Statistical Physics and Spatial Statistics. — Springer, Berlin, Heidelberg, 2000. — P. 111–184.
85. Mostaghimi P. Computations of absolute permeability on micro-CT images / P. Mostaghimi, M. Blunt and B. Bijeljic// Mathematical Geosciences. — 2013. — Vol. 45. — I. 1. — P. 103–125.
86. Numerical study of the interface errors of finite-difference simulations of seismic waves / D. Vishnevsky [et al.] // Geophysics. — 2014. — Vol. 79. — P. T219–T232.
87. Observer-dependent variability of the thresholding step in the quantitative analysis of soil images and X-ray microtomography data / P. C. Baveye [et al.] // Geoderma. — 2010. — Vol. 157. — P. 51–63.
88. Otsu N. Thresholds selection method from grey-level histograms / N. Otsu// IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics. — 1979. — Vol. 9. — I. 1. — P. 62–66.
89. Petchsingto T. Deterministic Modeling of Fluid Flow through a CT-scanned Fracture Using Computational Fluid Dynamics / T. Petchsingto, Z. T. Karpyn// Energy Sources Part a-Recovery Utilization and Environmental Effects. — 2009. — Vol. 31. — I. 11. — P. 897–905.
90. Pore Scale Characterization of Carbonates at Multiple Scales: Integration of Micro-CT, BSEM, and FIBSEM / R. M. Sok [et al.] // Petrophysics. — 2010. — Vol. 51. — I. 6. — P. 379–387.
91. Pore-scale imaging and modelling / M. J. Blunt [et al.] // Advances in Water Resources. — 2013. — Vol. 51. — P. 197–216.
92. Pore scale study of flow in porous media: Scale dependency, rev, and statistical rev / D. Zhang [et al.] // Geophysical Research Letters. — 2000. — Vol. 27. — I. 8. — P. 1195–1198.
93. Relative permeability from tomographic images; effect of correlated heterogeneity / J.-Y. Arns [et al.] // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2003. — Vol. 39. — I. 34. — P. 247–259.

94. Representative elementary volumes for evaluating effective seismic properties of heterogeneous poroelastic media / M. Milani [et al.] // *Geophysics*. — 2016. — Vol. 81. — I. 2. — P. 177–189.
95. Reshetova G. Parallel numerical method to estimate the effective elastic moduli of rock core samples from 3D tomographic images / G. Reshetova, T. Khachkova // *Lecture Notes in Computer Science*. — 2019. — Vol. 11386. — P. 452–460.
96. Reshetova G. A comparison of MPI/OpenMP and Coarray Fortran for digital rock physics application / G. Reshetova, V. Cheverda, T. Khachkova // *Lecture Notes in Computer Science*. — 2019. — Vol. 11657. — P. 232–244.
97. Percolating length scales from topological persistence analysis of micro-CT images of porous materials / V. Robins [et al.] // *Water Resources Research*. — 2016. — Vol. 52. — I. 1. — P. 315–329.
98. Rozenbaum O. Representative elementary volume assessment of three-dimensional X-ray microtomography images of heterogeneous materials. Application to limestones / O. Rozenbaum, S. R. du Roscoat // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 89. — I. 5. — W053304.
99. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems / Y. Saad. — SIAM, 2003. — 567 p.
100. Saenger E. H. Numerical methods to determine effective elastic properties / E. H. Saenger // *International Journal of Engineering Science*. — 2008. — Vol. 46. — I. 6. — P. 598–605.
101. Sain R. Numerical simulation of Pore-Scale Heterogeneity and its Effects on Elastic, Electrical and Transport Properties / R. Sain // Stanford: Ph.D. Dissertation, Stanford University, 2010. — 198 p.
102. Saxena N. Estimating elastic moduli of rocks from thin sections: Digital rock studies of 3D properties from 2D images / N. Saxena, G. Mavko // *Computers and Geosciences*. — 2016. — Vol. 88. — P. 9–21.
103. Schladitz K. Quantitative micro-CT / K. Schladitz // *J. Microscop.* — 2011. — Vol. 243. — I. 2. — P. 111–117.

104. Schoenberg M. Calculus for finely layered anisotropic media / M. Schoenberg, F. A. Muir // *Geophysics*. — 1989. — Vol. 54. — P. 581–589.
105. Second-order analysis by variograms for curvature measures of two-phase structures / C. H. Arns [et al.] // *The European physical journal B*. — 2005. — Vol. 47. — P. 397–409.
106. Signal variations in high-granularity Si pixel detectors / L. Tlustos [et al.] // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. — 2004. — Vol. 51. — I. 6. — P. 3006–3012.
107. Simonovski I. Estimating the correlation length of inhomogeneities in a polycrystalline material / I. Simonovski, M. Kovac, L. Cizelj // *Material Science and Engineering: A*. — 2004. — Vol. 381. — I. 1-2. — P. 273–280.
108. Using strain energy-based prediction of effective elastic properties in topology optimization of material microstructures / W. Zhang [et al.] // *Acta Mechanica Sinica*. — 2007. — Vol. 23. — P. 77–89.
109. Using X-ray computed tomography in pore structure characterization for a berea sandstone: resolution effect / S. Peng [et al.] // *J. Hydrol.* — 2012. — Vol. 472. — P. 254–261.
110. Validation of X-ray microfocus computed tomography as an imaging tool for porous structures / G. Kerckhofs [et al.] // *Review of Scientific Instruments*. — 2008. — Vol. 79. — P. W013711.
111. Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method / J. Virieux // *Geophysics*. — 1986. — Vol. 51. — P. 889–901.
112. Virtual permeametry on microtomographic images / C. H. Arns [et al.] // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. — 2004. — Vol. 45. — I. 12. — P. 41–46.
113. Vogel H. J. Quantification of soil structure based on minkowski functions / H. J. Vogel, U. Weller, S. Schluter // *Computers and Geosciences*. — 2010. — Vol. 36. — I. 10. — P. 1236–1245.
114. Wildenschild D. X-ray imaging and analysis techniques for quantifying pore-scale structure and processes in subsurface porous medium systems / D. Wildenschild, A. P. Sheppard // *Advances in Water Resources*. — 2013. — Vol. 51. — P. 217–246.

115. X-ray CT and hydraulic evidence for a relationship between fracture conductivity and adjacent matrix porosity / Z. T. Karpyn [et al.] // Engineering Geology. — 2009. — Vol. 103. — I. 3-4. — P. 139–145.
116. Yoon H. Nanopore structures, statistically representative elementary volumes, and transport properties of chalk / H. Yoon, T. A. Dewers // Geophysical research letters. — 2013. — Vol. 40. — I. 16. — P. 4294–4298.
117. Zeller R. Elastic constants of polycrystals / R. Zeller, P. H. Dederichs // Phys. Stat. Sol. B. — 1973. — Vol. 55. — P. 831–842.